

Tesis para obtener el grado de Magister en  
Matemática Aplicada

# Distribuciones Tipo Fase y sus Aplicaciones en la Teoría de la Ruina

Leider Salcedo García  
Sandra Rojas Sevilla

***Director:***  
*Prof. Msc. Francisco Zuluaga*

Abril de 2014



**Universidad EAFIT**  
Escuela de Ciencias y Humanidades  
Maestría en Matemática Aplicada



*Para mi amada hija Viky y mi hermosa esposa Pilar, Leider.  
Ha sido un proceso de mucho sacrificio y dificultades que Gracias a  
Dios han sido superadas, por eso dedico este trabajo a Dios por su  
infinito amor, a Mi hijo Juan Manuel Pretel quien es mi mundo, a  
Mi hermanito Lalo por su nobleza y valentía para salir adelante y ser  
un ejemplo de superación, Sandra.*



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1. Preliminares Matemáticos</b>                                      | <b>3</b>  |
| 1.1. Proceso Estocástico y Propiedades Básicas . . . . .                | 3         |
| 1.2. Cadenas de Markov . . . . .  | 5         |
| 1.2.1. Distribución Inicial y Probabilidades de Transición . . . . .    | 5         |
| 1.2.2. Cálculo de la Matriz de Transición de la n-ésima Etapa . . . . . | 8         |
| 1.2.3. Comportamiento a Largo Plazo . . . . .                           | 10        |
| 1.3. Procesos de Markov . . . . .                                       | 15        |
| 1.3.1. Matriz de Funciones de Transición . . . . .                      | 15        |
| 1.3.2. Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov . . . . .                 | 20        |
| 1.3.3. Saltos en los Procesos de Markov . . . . .                       | 21        |
| 1.4. Procesos de Poisson . . . . .                                      | 25        |
| 1.4.1. Proceso de Poisson Compuesto . . . . .                           | 33        |
| 1.5. Procesos de Renovación . . . . .                                   | 34        |
| <b>2. Riesgo y Probabilidad de Ruina</b>                                | <b>37</b> |
| 2.1. Modelo Individual . . . . .  | 37        |
| 2.2. Modelo Colectivo . . . . .   | 38        |
| 2.3. Proceso de Riesgo a Tiempo Discreto . . . . .                      | 39        |
| 2.3.1. Probabilidad de Ruina con Horizonte Infinito . . . . .           | 40        |
| 2.3.2. Probabilidad de Ruina con Horizonte Finito . . . . .             | 40        |
| 2.4. Proceso de Riesgo a Tiempo Continuo . . . . .                      | 41        |
| 2.4.1. Modelo Clasico de Cramér-Lundberg . . . . .                      | 41        |
| 2.4.2. Condición de Ganancia Neta . . . . .                             | 45        |
| 2.4.3. Ruina . . . . .  | 46        |
| <b>3. Distribuciones Tipo Fase</b>                                      | <b>55</b> |
| 3.1. Distribuciones Tipo Fase Continuas . . . . .                       | 55        |
| 3.2. Ejemplos de Distribuciones Tipo Fase Continuas . . . . .           | 61        |
| 3.2.1. Distribución Exponencial . . . . .                               | 61        |
| 3.2.2. Distribución Erlang . . . . .                                    | 61        |
| 3.2.3. Distribución Hiperexponencial . . . . .                          | 63        |
| 3.2.4. Distribución Coxian . . . . .                                    | 63        |
| 3.3. El Modelo de Cramer-Lundberg . . . . .                             | 64        |
| 3.4. Reclamaciones Tipo Fase . . . . .                                  | 68        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Aplicaciones y Resultados Numéricos</b>                                | <b>73</b> |
| 4.1. Reclamaciones Exponenciales . . . . .                                   | 73        |
| 4.2. Reclamaciones Hipereexponenciales . . . . .                             | 75        |
| 4.3. Reclamaciones con Distribución Erlang . . . . .                         | 78        |
| 4.3.1. Reclamaciones con Distribución Mezcla de Erlang(2) . . . . .          | 81        |
| 4.4. Interpolación de la Probabilidad de Ruina . . . . .                     | 82        |
| <b>Conclusiones</b>  | <b>87</b> |
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>89</b> |
| <b>A. Rutinas</b>  | <b>91</b> |
| A.1. Código en R para calcular la probabilidad de ruina . . . . .            | 91        |
| A.2. Código en M para calcular polinomios interpoladores de Newton . . . . . | 92        |
| <b>B. Polinomio Interpolador de Newton</b>                                   | <b>93</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>95</b> |
| <b>Nomenclatura</b>  | <b>97</b> |

# Introducción

La probabilidad de ruina es una medida del riesgo; el *riesgo*, es un término al que diariamente se enfrenta el ser humano, existen distintas maneras de asumir el riesgo, dependiendo el área o el enfoque en el cual se esté considerando. La palabra riesgo se utiliza para describir sucesos o eventos desconocidos con un cierto nivel de incertidumbre, dicha incertidumbre puede ser desfavorable o favorable. Es difícil encontrar actividades humanas donde se pueda tener el control absoluto de tales eventos. Dentro del entorno financiero esto no es la excepción, continuamente se necesitan hacer predicciones para maximizar beneficios y disminuir riesgos. Particularmente para las compañías aseguradoras el riesgo y saber medirlo adecuadamente es de vital importancia para su perduración.

Una de las principales ramas de la Matemática Aplicada es la Matemática Actuarial, y dentro de ésta, la Teoría del Riesgo, cuyo objetivo es modelar el flujo de capital de una compañía aseguradora. Dentro de la Teoría del Riesgo encontramos en la literatura actuarial dos tipos de teorías del riesgo: La Teoría del Riesgo Individual y la Teoría del Riesgo Colectivo. La teoría individual considera a la cartera como una suma de riesgos, de forma que la siniestralidad total viene calculada como la suma de la siniestralidad de cada una de las pólizas. La teoría colectiva considera un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo.

Uno de los problemas más estudiados dentro de la Teoría del Riesgo es la *Probabilidad de Ruina* de una compañía. A principios del Siglo XX este problema fue estudiado en la tesis doctoral de *Filip Lundberg* (1903). En esta época Lundberg utilizó términos distintos a los actuales debido a que no se había formalizado la teoría de los procesos estocásticos. Lundberg introdujo un modelo para estudiar este fenómeno, denominado el Modelo Clásico de Riesgo también conocido como el Modelo de Poisson Compuesto o el *Modelo Clásico de Cramér-Lundberg*, esto gracias a las investigaciones que realizó posteriormente *Carl Cramér* en 1930, el cual retoma las ideas originales de Lundberg y las pone en el contexto de los procesos estocásticos, en ese entonces de reciente creación.

El Modelo Clásico de Cramér-Lundberg es el proceso estocástico a tiempo continuo  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  dado por  $C_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ , donde  $u$  representa el capital inicial de la compañía aseguradora,  $pt$  corresponde a la entrada por primas durante el periodo  $(0, t]$  a una tasa constante  $p > 0$  y las  $Y_i$  son el monto de las reclamaciones independientes, idénticamente distribuidas e independientes del proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  el cual modela la forma en la que las reclamaciones son recibidas, donde  $N_t$

es el número de siniestros ocurridos en  $(0, t]$ . El proceso  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  recibe el nombre de proceso de riesgo o proceso de superávit.

Existen varios métodos para estimar la Probabilidad de Ruina, pero el cálculo de esta probabilidad es una labor que en general no es fácil de hacer ya que involucra una ecuación íntegro diferencial para la probabilidad de ruina con horizonte infinito, salvo casos especiales cuando las reclamaciones se distribuyen Tipo Fase, puesto que estas pueden ser manipuladas de tal manera que se puede calcular y modelar la probabilidad de ruina de forma exacta bajo condiciones especiales. Este trabajo trata sobre el cálculo exacto de la Probabilidad de Ruina, con el objetivo de obtener formulas explícitas bajo condiciones especiales o polinomios interpoladores que permitan determinar tal probabilidad para cualquier capital inicial en el caso de riesgo a tiempo continuo en el marco de un Modelo de Riesgo Colectivo cuando los montos de las reclamaciones tienen una distribución de Tipo Fase (exponencial, hiperexponencial, Erlang, Mezcla de Erlang, etc.), tomando como fundamentación teórica lo expuesto por *Mogents Bladt* [1] y otros elementos teóricos de *Asmussen y Rolski* (1991) [2] y también *Dickson y Hipp* (1998) [3].

En el Capítulo 1 se hace un bosquejo sobre los fundamentos teóricos más importantes en los que reposa el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg y las Distribuciones Tipo Fase haciendo énfasis principalmente en los Procesos de Markov y los Procesos de Poisson. En el Capítulo 2 se explica brevemente el Modelo de Riesgo Individual y Colectivo, la Probabilidad de Ruina con Horizonte Infinito y Finito profundizando los resultados teóricos en los Procesos de Riesgo en Tiempo Continuo finalizando con el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg y las ecuaciones para el cálculo de la Probabilidad de Ruina. En el Capítulo 3 se estudian en detalle las distribuciones Tipo Fase Continuas y sus principales características a partir de resultados importantes, exhibiendo las distribuciones Tipo Fase más comunes y retomando el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg suponiendo que las reclamaciones tienen distribución Tipo Fase.

Finalmente en el Capítulo 4 se lleva a cabo las aplicaciones y simulaciones correspondientes a través de fórmulas explícitas que permiten el cálculo exacto de la Probabilidad de Ruina (usando el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg bajo el supuesto de que las reclamaciones tiene distribución Tipo Fase) siempre y cuando la distribución de las reclamaciones y los parámetros  $\pi$  y  $\mathbf{T}$  así lo permitan, en la medida que no exijan cálculos matriciales complejos, y en caso contrario, se aporta un método implementando polinomios de aproximación de Newton que permite interpolar una tabla de valores de la probabilidad de ruina generada por un código en  $\mathbf{R}$ , para obtener formulas explícitas que facilite calcular tal probabilidad para cualquier capital inicial en un intervalo dado.



# 1. Preliminares Matemáticos

## 1.1. Proceso Estocástico y Propiedades Básicas

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [4] y [5].

### **Definición 1.1.1**

Un sistema  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de un conjunto  $\Omega \neq \emptyset$  se llama  $\sigma$ -álgebra si posee las siguientes propiedades:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

### **Definición 1.1.2**

La tripleta  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se llama un espacio de probabilidad si  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$  y  $P$  es una medida de probabilidad sobre el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Es decir se cumplen los tres axiomas de Kolmogorov:

1.  $P(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Para cada sucesión de eventos  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  disyuntos dos a dos se cumple 
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Considérese un sistema que puede estar en cualquiera de un conjunto de estados que han debido ser previamente definidos. Supóngase que el sistema evoluciona de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con una regla de movimiento, y sea  $X_t$  el estado del sistema al tiempo  $t$ . Si se supone que la forma en la que el sistema evoluciona es provocada por algún mecanismo incierto, entonces  $X_t$  es una variable aleatoria para cada valor de  $t$ . Esta colección de variables aleatorias es un proceso estocástico, y se utiliza para modelar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. La definición de un proceso estocástico toma como base un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y puede enunciarse así:

**Definición 1.1.3**

Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  es una colección de variables aleatorias  $X_t$  sobre un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y parametrizadas por un conjunto  $T$  llamado espacio parametral, donde dichas variables toman valores en un espacio medible  $(E, \Theta)$  llamado espacio de estados. Los elementos de  $E$  se llaman estados.

**Definición 1.1.4**

Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

1. Si  $T \in \{0, 1, \dots\}$  se dice que el proceso es discreto y se simboliza  $\{X_n\} := \{X_n\}_{n=0,1,\dots}$ .
2. Si  $T = [0, \infty)$  se dice que el proceso es continuo y se simboliza  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ .
3. El evento  $\{X_t \in E\}$  corresponde a la situación en donde al tiempo  $t$  el proceso toma algún valor dentro del conjunto  $E$ . En particular,  $\{X_t = i\}$  es el evento en donde al tiempo  $t$  el proceso se encuentra en el estado  $i \in E$ .

Un proceso estocástico, puede considerarse como una función de dos variables  $X : T \times \Omega \rightarrow E$  tal que a la pareja  $(t, \omega)$  se le asigna el estado  $X_t(\omega) := X(t, \omega) \in E$  con  $t \in T$  y  $\omega \in \Omega$ .

Un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es de *ensayos independientes* si está constituido por variables aleatorias independientes.

**Definición 1.1.5**

Un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es de Markov si conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros. Es decir si el proceso cumple con la siguiente condición denominada propiedad de Markov:

$$P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),$$

con  $t_0, \dots, t_{n-1}, t_n \in T$  y  $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \in E$ .

**Definición 1.1.6**

Un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes si para cualquiera tiempos  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las variables  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes. Esto quiere decir que los desplazamientos que tiene el proceso en estos intervalos disjuntos de tiempo son independientes unos de otros.

**Definición 1.1.7**

Un proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es estacionario si la distribución de  $X_t$  es la misma que la de  $X_{t+h}$  para cualquier  $h > 0$  y tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos  $s < t$  se tiene que la distribución de  $X_{t+h} - X_{s+h}$  es la misma que la de  $X_t - X_s$  para cualquier  $h > 0$ . Es decir, el incremento que tiene el proceso entre los tiempos  $s$  y  $t$  sólo depende de estos tiempos a través de la diferencia  $t - s$ , y no de los valores específicos de  $s$  y  $t$ .

**1.2. Cadenas de Markov**

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [5], [6] y [7].

**1.2.1. Distribución Inicial y Probabilidades de Transición**

Considérese una evolución en tiempo discreto en el espacio de estado finito  $E = \{1, 2, \dots, \ell\}$ . Sea  $\alpha_i$  la probabilidad de que la evolución comience en el estado  $i \in E$  en el momento 0. Además sea  $p_{ij}$  la probabilidad de que en un solo paso la evolución se mueva desde el estado  $i$  al estado  $j$ . Se supone que  $p_{ij} \geq 0$  y además:

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_{ij} = 1. \quad (1.1)$$

Cada matriz  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$  que cumpla con la Ecuación 1.1 es llamada *matriz estocástica*. El desarrollo futuro de una evolución a menudo es independiente de su desarrollo en el pasado, siempre que el estado actual de la evolución se conozca. Formalmente se puede definir esta independencia condicional al introducir la siguiente noción sobre cadenas de Markov homogéneas.

**Definición 1.2.1.1**

Una secuencia  $X_0, X_1, \dots$  de variables aleatorias que toman valores en  $E$  es denominada una cadena de Markov homogénea si existe una matriz estocástica  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$  llamada matriz de transición de  $\{X_n\}$  y una función de probabilidad  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  en  $E$ , denominada distribución inicial (o función de probabilidad inicial) de  $\{X_n\}$ , tal que para cada  $n = 0, 1, \dots$  y para cada  $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$  se cumple que:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (1.2)$$

Dado que solo se considera el caso homogéneo, se habla brevemente de cadenas de Markov omitiendo el termino homogéneo. A menudo es más importante no el

estado exacto de la cadena de Markov  $\{X_n\}$  en sí, si no su distribución. En vista de la Ecuación 1.2 esta última está determinada únicamente por la función de probabilidad  $\alpha$  y la matriz estocástica  $\mathbf{P}$ .

### **Teorema 1.2.1.1**

Sea  $\{X_n\}$  una secuencia de variables aleatorias que toman valores en  $E$ .  $\{X_n\}$  es una cadena de Markov si y solamente si, existe una matriz estocástica  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$  de tal manera que para todo  $n = 1, 2, \dots$  y  $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$  se cumple que:

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{i_{n-1}i_n}, \quad (1.3)$$

donde  $P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$

#### **Demostración:**

Sea  $\{X_n\}$  una cadena de Markov, entonces de la Ecuación 1.2 se obtiene:

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{i_{n-1}i_n}.$$

Supóngase que  $\{X_n\}$  satisface la Ecuación 1.3 para alguna matriz estocástica  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ . Sea  $\alpha_i = P(X_0 = i)$  para todo  $i \in E$ , entonces se tiene:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{i_0} = 0 \\ \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} & \text{si } \alpha_{i_0} > 0 \end{cases}$$

Es decir, se ha probado la Ecuación 1.2 para  $n = 1$ . Supóngase que la Ecuación 1.2 se cumple para  $n = k - 1$ . En este caso se tiene que:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = 0 \text{ si } P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) \times \\ &\quad P(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-2} i_{k-1}} p_{i_{k-1} i_k}, \end{aligned}$$

siempre que  $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) > 0$ . Luego la Ecuación 1.2 se cumple para  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual completa la prueba.  $\square$

### **Corolario 1.2.1.1**

Si  $\{X_n\}$  es una cadena de Markov, entonces:

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}), \quad (1.4)$$

donde  $P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$ .

***Demostración:***

Es suficiente con observar que:

$P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$  implica  $P(X_{n-1} = i_{n-1}) > 0$ .

Ahora de la Ecuación 1.2 se obtiene:

$$\frac{P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1})}{P(X_{n-1} = i_{n-1})} = \frac{\sum_{i_0, \dots, i_{n-2} \in E} \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_n}}{\sum_{i_0, \dots, i_{n-2} \in E} \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}}} = p_{i_{n-1} i_n}.$$

Luego usando la Ecuación 1.3 se tiene la Ecuación 1.4 .  $\square$

La propiedad de independencia condicional indicada en el corolario 1.2.1.1 es llamada la *propiedad de Markov* de  $\{X_n\}$ . Para  $n \geq 1$  e  $i, j \in E$  fijo, el producto  $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j}$  puede ser visto como la probabilidad de la ruta  $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow j$ . Análogamente la suma  $p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in E} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j}$  se interpreta como la probabilidad de transición desde el estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  pasos. En particular, si  $\{X_n\}$  es una cadena de Markov con  $P(X_0 = i) > 0$ , entonces  $p_{ij}^{(n)}$  es la probabilidad de transición de la  $n$ -ésima etapa. Donde  $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ . De acuerdo con esto la matriz  $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in E}$  es llamada la *matriz de transición de la  $n$ -ésima etapa* de  $\mathbf{P}$ . También se establece que  $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz idéntica. Del siguiente lema es fácil concluir que  $\mathbf{P}^{(n)}$  es una matriz estocástica.

***Lema 1.2.1.1***

Para todo  $n, m = 0, 1, \dots$  se tiene que:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n. \quad (1.5)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}. \quad (1.6)$$

***Demostración:***

Se proba por inducción que  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ . Para tal efecto es claro que para  $n = 1$  es válido lo afirmado. Veamos que la afirmación se cumple para  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} P^{(2)} = p_{ij}^{(2)} &= p_{i1} p_{1j} + p_{i2} p_{2j} + p_{i3} p_{3j} + \dots + p_{i\ell} p_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_{ik} p_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{i\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1j} & p_{2j} & p_{3j} & \cdots & p_{\ell j} \end{bmatrix}^T \\
&= \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}^2.
\end{aligned}$$

Supóngase ahora que la afirmación es cierta para  $n - 1$  y veamos que es válida también para  $n$ :

$$\begin{aligned}
P^{(n)} &= p_{ij}^{(n)} = p_{i1}^{(n-1)} p_{1j} + p_{i2}^{(n-1)} p_{2j} + p_{i3}^{(n-1)} p_{3j} + \cdots + p_{i\ell}^{(n-1)} p_{\ell j} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \\
&= \begin{bmatrix} p_{i1}^{(n-1)} & p_{i2}^{(n-1)} & p_{i3}^{(n-1)} & \cdots & p_{i\ell}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1j} & p_{2j} & p_{3j} & \cdots & p_{\ell j} \end{bmatrix}^T \\
&= \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}^n
\end{aligned}$$

Además según lo anterior  $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \mathbf{P}^m = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}$ .  $\square$

La matriz de la Ecuación 1.6 es usualmente llamada *ecuación de Chapman-Kolmogorov*. Usando el lema 1.2.1.1 se obtiene la siguiente representación de la distribución de la variable  $X_n$ . Por conveniencia se escribe  $P(X_n = j | X_0 = i) = 0$  si  $\alpha_i = P(X_0 = i) = 0$ .

### **Teorema 1.2.1.2**

Si  $\{X_n\}$  es una cadena de Markov con matriz de transición  $\mathbf{P}$  y función de probabilidad inicial  $\alpha$ , entonces la distribución  $\alpha_n$  de  $X_n$  viene dada por:

$$\alpha_n = \alpha \mathbf{P}^n. \quad (1.7)$$

#### **Demostración:**

Se tiene que, para  $j = 1, \dots, l$  se cumple:

$$\begin{aligned}
\alpha_j^{(n)} &= P(X_n = j) = \sum_{i \in E} P(X_n = j | X_0 = i) \alpha_i \\
&= \sum_{i \in E} \alpha_i p_{ij}^{(n)} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1j}^{(n)} & p_{2j}^{(n)} & \cdots & p_{\ell j}^{(n)} \end{bmatrix}^T \\
&= \alpha \mathbf{P}^n. \quad \square
\end{aligned}$$

### **1.2.2. Cálculo de la Matriz de Transición de la n-ésima Etapa**

De la Ecuación 1.7 se observa que el cálculo de la función de probabilidad  $\alpha_n$  de la variable  $X_n$  está estrechamente relacionado con el cálculo de la  $n$ -ésima potencia

de la matriz  $\mathbf{P}$ . Se plantea un método algebraico para calcular  $\mathbf{P}^n$  el cual hace uso del concepto de *valores propios* y *vectores propios*. Supóngase que  $\mathbf{A}$  es una matriz cualquiera de tamaño  $\ell \times \ell$  (no necesariamente estocástica), y que además  $\phi$  es un vector  $\ell$  – *dimensional* con por lo menos una componente diferente de cero, y sea  $\theta$  un número real o complejo. Una matriz de cualquier dimensión donde todas sus entradas son cero se representa por  $\mathbf{0}$ . La transpuesta de la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell}$  se denota por  $\mathbf{A}^T$ , es decir  $\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{i,j=1,\dots,\ell}$ .

Si:

$$\mathbf{A}\phi^T = \theta\phi^T, \quad (1.8)$$

entonces  $\theta$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$  y  $\phi$  es un vector propio derecho asociado a  $\theta$ . Si la Ecuación 1.8 se escribe como  $(\mathbf{A} - \theta\mathbf{I})\phi^T = \mathbf{0}$  se observa que los valores propios son exactamente las soluciones de la *ecuación característica*:

$$\det(\mathbf{A} - \theta\mathbf{I}) = 0. \quad (1.9)$$

Si  $\psi$  es un vector distinto de cero, solución de:

$$\psi\mathbf{A} = \theta\psi. \quad (1.10)$$

Entonces se dice que  $\psi$  es un vector propio izquierdo asociado a  $\theta$ . Es fácil ver que para cada valor propio  $\theta$ , una solución  $\psi$  de la Ecuación 1.10 siempre existe ya que la Ecuación 1.9 implica que  $\det((\mathbf{A} - \theta\mathbf{I})^T) = 0$ , es decir existe un vector columna  $\psi^T$  tal que  $(\mathbf{A} - \theta\mathbf{I})^T \psi^T = 0$ , lo cual es equivalente a la Ecuación 1.10. Note que la Ecuación 1.9 es una ecuación algebraica de orden  $\ell$ , por lo tanto se obtendrán  $\ell$  soluciones  $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ , los cuales pueden ser complejas y algunas de ellas pueden coincidir. Se asume que los valores propios son numerados de manera que  $|\theta_1| \geq |\theta_2| \geq \dots \geq |\theta_\ell|$ . Sea  $\Phi = (\phi_1^T, \dots, \phi_\ell^T)$  una matriz de tamaño  $\ell \times \ell$  conformada por vectores propios derechos (vectores columnas) y sea:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_\ell \end{bmatrix},$$

una matriz de tamaño  $\ell \times \ell$  constituida por vectores propios izquierdos y sea  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\ell)$  un vector de valores propios. De esto resulta la ecuación:

$$\mathbf{A}\Phi = \Phi \text{diag}(\theta), \quad (1.11)$$

donde  $\text{diag}(\theta)$  representa la matriz diagonal con los elementos  $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ , en la diagonal y los demás elementos iguales a cero. A continuación se hace una serie de observaciones:

- Si todos los vectores propios  $\phi_1, \dots, \phi_\ell$  son linealmente independientes, lo cual se supondrá en adelante, entonces  $\Phi^{-1}$  existe. en este caso  $\Psi = \Phi^{-1}$ .

- Una consecuencia directa de la Ecuación 1.11 es  $\mathbf{A} = \Phi \text{diag}(\boldsymbol{\theta}) \Phi^{-1} = \Phi \text{diag}(\boldsymbol{\theta}) \Psi$ . Por lo tanto:

$$\mathbf{A}^n = \Phi (\text{diag}(\boldsymbol{\theta}))^n \Phi^{-1} = \Phi (\text{diag}(\boldsymbol{\theta}))^n \Psi. \quad (1.12)$$

- De la Ecuación 1.12 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= [\phi_1^T, \dots, \phi_\ell^T] (\text{diag}(\boldsymbol{\theta}))^n \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_\ell \end{bmatrix} \\ &= [\theta_1^n \phi_1^T, \dots, \theta_\ell^n \phi_\ell^T] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_\ell \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual produce la *representación espectral* de  $\mathbf{A}^n$ . Es decir:

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^{\ell} \theta_i^n \phi_i^T \psi_i. \quad (1.13)$$

La aplicación de este procedimiento a la matriz de transición  $\mathbf{P}$  y la representación espectral dada en la Ecuación 1.13, ofrece una base para el cálculo de la matriz de transición de la  $n$  –ésima etapa  $\mathbf{P}^n$ . Existe por supuesto la dificultad de hallar los valores propios y los vectores propios de  $\mathbf{P}$ . Sin embargo en muchos casos esto se puede hacer por medio de un software como por ejemplo *MATLAB*. Una ventaja importante del método de la representación espectral es que la complejidad de los cálculos numéricos no aumenta con  $n$ , ya que una vez que se conocen los valores propios y los vectores propios de  $\mathbf{P}$ , es fácil determinar  $\mathbf{P}^n$  por la Ecuación 1.13. El supuesto crucial para la validez de la Ecuación 1.13 es que los vectores propios  $\phi_1, \dots, \phi_\ell$  sean linealmente independientes.

### 1.2.3. Comportamiento a Largo Plazo

Para  $n$  grande, puede ser difícil calcular la función de probabilidad  $\alpha_n = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_\ell^{(n)})$  de  $\{X_n\}$  usando la Ecuación 1.7. Una opción es encontrar las condiciones bajo las cuales  $\alpha_n$  converge a un límite, por ejemplo  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$ , y luego se utiliza  $\pi$  como una aproximación a  $\alpha_n$ . Este método es de importancia práctica debido a que en muchos casos el cálculo de  $\pi$  es mucho más fácil que el de los  $\alpha_n$ . Considérese el caso en el que:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix},$$



con  $0 < p, q \leq 1$ . Se mostrará que la matriz de transición de la  $n$  –ésima etapa es:

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Para probar la Ecuación 1.14, se tendrá en cuenta que si

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}, \text{ entonces } \mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^n,$$

$$\text{y además solo se mostrará que } p_{00}^{(n)} = \frac{q}{p+q} + \frac{p(1-p-q)^n}{p+q}.$$

Los demás elementos se demuestran de forma similar. Para tal efecto se tiene que:

$$p_{00} = 1 - p, \quad p_{10} = q \text{ y } p_{01}^{(n-1)} = 1 - p_{00}^{(n-1)}.$$

Por lo tanto:

$$p_{00}^{(n)} = p_{00}^{(n-1)} p_{00} + p_{01}^{(n-1)} p_{10} = p_{00}^{(n-1)} (1 - p) + (1 - p_{00}^{(n-1)}) q = q + p_{00}^{(n-1)} (1 - p - q).$$

De esta manera:

$$p_{00}^{(1)} = q + p_{00}^{(0)} (1 - p - q) = q + (1) (1 - p - q) = 1 - p.$$

$$p_{00}^{(2)} = q + p_{00}^{(1)} (1 - p - q) = q + (1 - p) (1 - p - q).$$

$$p_{00}^{(3)} = q + p_{00}^{(2)} (1 - p - q) = q (1 - p - q)^0 + q (1 - p - q)^1 + (1 - p) (1 - p - q)^2.$$

$$p_{00}^{(4)} = q (1 - p - q)^0 + q (1 - p - q)^1 + q (1 - p - q)^2 + (1 - p) (1 - p - q)^3.$$

Es decir:

$$p_{00}^{(n)} = q \sum_{k=0}^{n-2} (1 - p - q)^k + (1 - p) (1 - p - q)^{n-1}.$$

Supóngase que  $s = \sum_{k=0}^{n-2} t^k$ , donde  $t = 1 - p - q$ . Por lo tanto:

$$s = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-2}.$$

$$st = (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-2}) t = t + t^2 + t^3 + \dots + t^{n-1}.$$

De esta manera:

$$s - st = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-2} - t - t^2 - t^3 - \dots - t^{n-1} = 1 - t^{n-1}.$$

Con lo que:

$$s = \sum_{k=0}^{n-2} (1 - p - q)^k = \frac{1 - t^{n-1}}{1 - t} = \frac{1 - (1 - p - q)^{n-1}}{1 - (1 - p - q)} = \frac{1 - (1 - p - q)^{n-1}}{p + q}.$$

Es decir:

$$p_{00}^{(n)} = q \left[ \frac{1 - (1 - p - q)^{n-1}}{p + q} \right] + (1 - p) (1 - p - q)^{n-1} = \frac{q}{p + q} + \frac{p(1 - p - q)^n}{p + q}. \quad \square$$

Por otro lado si se supone que  $p + q < 2$ , entonces se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Lo anterior significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = \frac{q}{p+q} = \pi_{00} = \pi_0$$

Análogamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{01}^{(n)} = \frac{p}{p+q} = \pi_{01} = \pi_1.$$

Es decir según la Ecuación 1.7:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \left[ \frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right]. \quad (1.16)$$

Sin embargo, si  $p + q < 2$ , entonces:

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} P & \text{si } n \text{ es par} \\ I & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que la distribución límite  $\pi$  en la Ecuación 1.16 no depende de la elección de la distribución inicial  $\alpha = \alpha_0$ . Esta propiedad de invariancia de  $\pi$  está asociada con la noción de *ergodicidad* de cadenas de Markov.

### **Definición 1.2.3.1**

Una cadena de Markov  $\{X_n\}$  con matriz de transición  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$  se dice que es *ergodica* si:

1. Existen los siguientes límites para cada  $j \in E$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j. \quad (1.17)$$

2. Los  $\pi_j$  son estrictamente positivos y son independientes de  $i$ .

3.  $\pi_j$  es una función de probabilidad. Es decir:  $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$ .

Una matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  de tamaño  $\ell \times \ell$  es llamada *no negativa* si todas las entradas  $a_{ij}$  son no negativas. Una matriz  $\mathbf{A}$  no negativa es llamada *regular* si existe algún  $n_0 \geq 1$  tal que todas las entradas de  $\mathbf{A}^{n_0}$  son estrictamente positivas.

**Teorema 1.2.3.1**

Una cadena de Markov  $\{X_n\}$  con matriz de transición  $\mathbf{P}$  es ergodica si y solamente si  $\mathbf{P}$  es regular.

**Demostración:**

Primero se demostrará que la condición:

$$\min_{i,j \in E} \{p_{ij}^{(n_0)}\} > 0. \quad (1.18)$$

Es suficiente para ergodicidad. Para tal efecto sea:

$$m_j^{(n)} = \min_{i \in E} \{p_{ij}^{(n)}\} \text{ y } M_j^{(n)} = \max_{i \in E} \{p_{ij}^{(n)}\}.$$

De la Ecuación 1.6 se tiene que  $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)}$ . En consecuencia:

$$m_j^{(n+1)} = \min_{i \in E} \{p_{ij}^{(n+1)}\} = \min_{i \in E} \left\{ \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \right\} \geq \min_{i \in E} \left\{ \sum_{k \in E} \min_{i \in E} \{p_{ik}^{(n)}\} p_{kj}^{(n)} \right\} = m_j^{(n)}.$$

Es decir  $m_j^{(n)} \leq m_j^{(n+1)}$  para todo  $n \geq 1$ . Análogamente se tiene que  $M_j^{(n)} \leq M_j^{(n+1)}$  para todo  $n \geq 1$ . Por lo tanto para probar la Ecuación 1.17 es suficiente mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) = 0, \quad (1.19)$$

para cada  $j \in E$ . Para tal efecto sea  $a = \min_{i,j \in E} \{p_{ij}^{(n_0)}\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n_0+n)} &= \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n_0)} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in E} (p_{ik}^{(n_0)} - a p_{jk}^{(n)}) p_{kj}^{(n)} + a \sum_{k \in E} p_{jk}^{(n)} p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k \in E} (p_{ik}^{(n_0)} - a p_{jk}^{(n)}) p_{kj}^{(n)} + a p_{jj}^{(2n)} \end{aligned}$$

Dado que  $p_{ik}^{(n_0)} - a p_{jk}^{(n)} \geq 0$ , se obtiene:

$$p_{ij}^{(n_0+n)} \geq \sum_{k \in E} (p_{ik}^{(n_0)} - a p_{jk}^{(n)}) \min_{k \in E} \{p_{kj}^{(n)}\} + a p_{jj}^{(2n)}.$$

$$p_{ij}^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)} \sum_{k \in E} (p_{ik}^{(n_0)} - a p_{jk}^{(n)}) + a p_{jj}^{(2n)} = m_j^{(n)} (1 - a) + a p_{jj}^{(2n)}.$$

Por lo tanto:  $m_j^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)} (1 - a) + a p_{jj}^{(2n)}$ .

Análogamente se tiene que:  $M_j^{(n_0+n)} \leq M_j^{(n)} (1 - a) + a p_{jj}^{(2n)}$ .

De esta manera:  $M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) (1 - a)$ ,

y por inducción sobre  $k$  se tiene:

$$M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} \leq P (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) (1 - a)^k, \quad (1.20)$$

para cada  $k \geq 1$ . Esto significa que hay una secuencia  $n_1, n_2, \dots$  de números naturales que tienden al infinito de tal manera que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M_j^{(n_k)} - m_j^{(n_k)}) = 0, \quad (1.21)$$

para cada  $j \in E$ . Dado que las diferencias  $M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$  son monótonas en  $n$ , se tiene que la Ecuación 1.21 se cumple para cada secuencia  $n_1, n_2, \dots$  de números naturales que tienden al infinito. Es decir se ha demostrado la Ecuación 1.19. Por otro lado se tiene que los límites  $\pi_j$  son positivos ya que:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} m_j^{(n)} \geq m_j^{(n_0)} \geq a > 0.$$

Además:

$$\sum_{j \in E} \pi_j = \sum_{j \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1$$

La Ecuación 1.18 es una consecuencia inmediata de  $\min_{j \in E} \{\pi_j\} > 0$  y la Ecuación 1.17 teniendo en cuenta que  $E$  es finito.  $\square$

Como los límites  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  no dependen de  $i$ , entonces se tiene que la Ecuación 1.5 y la Ecuación 1.7 implican:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)} = \pi.$$

### Corolario 1.2.3.1

Si la cadena de Markov  $\{X_n\}$  es ergódica, entonces  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_l)$  es la única solución probabilística para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad j \in E. \quad (1.22)$$

#### Demostración:

De la Ecuación 1.6 y la Ecuación 1.17 e intercambiando límites en las sumatorias se obtiene que:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} p_{ki}^{(n-1)} p_{ij} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n-1)} p_{ij} = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}.$$

Supóngase ahora que existe otra función de probabilidad  $\pi' = (\pi'_1, \dots, \pi'_l)$  de tal manera que  $\pi'_j = \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}$  para  $j \in E$ . Primero se probará por inducción que:

$$\pi'_j = \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}^{(n)}, \quad j \in E. \quad (1.23)$$

Es claro que lo afirmado se cumple para  $n = 1$ . Veamos que la afirmación es cierta para  $n = 2$ . Se tiene que:

$$\sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}^{(2)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij}^{(2)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n+1)} p_{ij} = \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij} = \pi'_j.$$

Supóngase que la afirmación es cierta para  $n - 1$  y veamos que se cumple para  $n$ :

$$\pi'_j = \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}^{(n-1)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij}^{(n-1)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n-1)} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}^{(n)}$$

Ahora si se deja que  $n \rightarrow \infty$  en la Ecuación 1.23, se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi'_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi'_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi'_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n)} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ki}^{(2n-1)} p_{ij} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} p_{ki}^{(2n-1)} p_{ij} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}^{(2n)} \\ &= \pi_j. \quad \square \end{aligned}$$

En notación matricial la Ecuación 1.22 se puede escribir como  $\pi = \pi \mathbf{P}$ . Esta ecuación se llama *ecuación de equilibrio* para  $\mathbf{P}$ .

## 1.3. Procesos de Markov

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1], [6], [8], [9] y [10].

En la sección anterior se estudió las secuencias de variables aleatorias, llamadas cadenas de Markov, que describen la evolución en periodos de tiempo discreto. En ocasiones es conveniente tener un modelo que describa situaciones en las que los estados cambien en momentos arbitrarios. Esto se obtiene teniendo en cuenta una colección de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , donde el parámetro  $t$  recorre toda la semirrecta no negativa  $\mathbb{R}^+$ . Hay que recordar que una de tales colecciones numerables de variables aleatorias se llama un proceso estocástico. El equivalente en tiempo continuo para la clase de cadenas de Markov consideradas en la sección anterior son los *procesos de Markov en tiempo continuo*, *procesos de Markov de Saltos* o simplemente *procesos de Markov* con un espacio de estado numerable. Con el objetivo de evitar dificultades técnicas se inicia esta sección con el caso de un espacio de estados finitos  $E = \{1, 2, \dots, \ell\}$

### 1.3.1. Matriz de Funciones de Transición

En la sección anterior se definieron las cadenas de Markov por medio de una función de probabilidad  $\alpha$  y una matriz de transición de un solo paso  $\mathbf{P}$ , o equivalentemente por la, función de probabilidad  $\alpha$  y la familia de matrices de transición  $\mathbf{P}^{(n)}$  con  $n = 1, 2, \dots$ . Se debe recordar que  $\mathbf{P}^{(n)}$  cumple con la ecuación de Chapman-Kolmogorov

descrita en la Ecuación 1.6. En tiempo continuo tambien se considera una función de probabilidad  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  y una familia de matrices estocásticas  $\mathbf{P}(h) = (p_{ij}(h))_{i,j \in E}$ , donde  $h \geq 0$  y  $p_{ij}(h)$  es la probabilidad de que en el tiempo  $h$ , la evolución se mueva desde el estado  $i$  al estado  $j$ .

### **Teorema 1.3.1.1**

*Ecuación de Chapman-Kolmogorov. Para  $h_1, h_2 \geq 0$  se tiene que:*

$$\mathbf{P}(h_1 + h_2) = \mathbf{P}(h_1) \mathbf{P}(h_2). \quad (1.24)$$

#### **Demostración:**

Por la ley de probabilidad total, se tiene:

$$\begin{aligned} p_{ij}(h_1 + h_2) &= P(X_{h_1+h_2} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(X_{h_1+h_2} = j, X_{h_1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(X_{h_1+h_2} = j \mid X_{h_1} = k, X_0 = i) P(X_{h_1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} P(X_{h_1+h_2} = j \mid X_{h_1} = k) \mathbb{P}(X_{h_1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_{ik}(h_1) p_{kj}(h_2). \quad \square \end{aligned}$$

La matriz de la Ecuación 1.24 es llamada la *ecuación de Chapman-Kolmogorov para tiempo continuo*. También se asume continuidad en cero. Es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}(h) = \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}. \quad (1.25)$$

$\mathbf{P}$  es uniformemente continua en  $h \geq 0$ . Una familia de matrices estocásticas  $\{\mathbf{P}(h)\}_{h \geq 0}$  que cumplan con la Ecuación 1.24 y la Ecuación 1.25 es llamada una *matriz de funciones de transición*.

### **Definición 1.3.1.1**

Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  que toma valores en  $E$ , es llamado un proceso de Markov homogéneo si existe una matriz de funciones de transición  $\{\mathbf{P}(h)\}_{h \geq 0}$  y una función de probabilidad  $\alpha$  en  $E$  tal que:

$$P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}),$$

con  $n = i_0, i_1, \dots, i_n \in E$  y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ,  $\alpha_i$  la probabilidad de que la evolución comience en el momento 0 en el estado  $i \in E$  y  $p_{ij}(h)$  la probabilidad de que en el tiempo  $h$ , la evolución se mueva desde el estado  $i$  al estado  $j$ .

La función de probabilidad  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  es llamada la *distribución inicial*. Hay que tener en cuenta que para cada  $h \geq 0$  fijo, la matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(h)$  es la matriz de transición de la cadena de Markov  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $X_n = X_{nh}$ . De acuerdo con esto, no es de extrañar que los procesos de Markov en tiempo continuo tengan la siguiente propiedad de independencia condicional.

### **Teorema 1.3.1.2**

Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  que toma valores en  $E$  es un proceso de Markov si y solamente si, existe una matriz de funciones de transición  $\{P(h)\}_{h \geq 0}$  tal que para todo  $n \geq 1$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$  y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , se cumple que:

$$P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) = p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}),$$

$$\text{donde } P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) > 0.$$

La demostración del teorema 1.3.1.2 es análoga a la demostración del teorema 1.2.1.1. Por otro lado y de manera similar al corolario 1.2.1.1, se obtiene la siguiente propiedad de independencia condicional de los procesos de Markov en tiempo continuo.

### **Corolario 1.3.1.1**

Si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov, entonces:

$$P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),$$

$$\text{donde } P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

A continuación se procede al estudio de la propiedad principal de las funciones de transición  $p_{ij}(h)$ ,  $h \geq 0$ , es decir la existencia de las intensidades de transición. Sea  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y 0 en otro caso.

### **Teorema 1.3.1.3**

Si  $\{\mathbf{P}(h)\}_{h \geq 0}$  es una matriz de funciones de transición, entonces los siguientes límites existen y son finitos:

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h}. \quad (1.26)$$

**Demostración:**

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $P(X_0 = i) > 0$  para todo  $i \in E$ . Inicialmente se demostrará la Ecuación 1.26 para  $i \neq j$ . Defínase  $p_{ii}^{j0}(h) = 1$  y además:

$$p_{ii}^{jv}(h) = P(X_{vh} = i; X_{kh} \neq j, 1 \leq k < v | X_0 = i).$$

$$f_{ij}^v(h) = P(X_{vh} = j; X_{kh} \neq j, 1 \leq k < v | X_0 = i).$$

Entonces por la Ecuación 1.24, se tiene que:

$$p_{ij}(nh) \geq \sum_{v=0}^{n-1} p_{ii}^{jv}(h) p_{ij}(h) p_{jj}((n-v-1)h). \quad (1.27)$$

Y

$$p_{ii}(vh) = p_{ii}^{jv}(h) + \sum_{m=1}^{v-1} f_{ij}^m(h) p_{ji}((v-m)h). \quad (1.28)$$

A partir de  $\sum_{m=1}^{v-1} f_{ij}^m(h) \leq 1$ , la Ecuación 1.28 se obtiene:

$$p_{ii}^{jv}(h) \geq p_{ii}(vh) - \max_{1 \leq m < v} p_{ji}((v-m)h). \quad (1.29)$$

Ahora, según la Ecuación 1.25 se obtiene que para  $\varepsilon > 0$  y  $i, j \in E$  con  $i \neq j$  existe  $h_0 > 0$  tal que:

$$\max_{0 \leq h \leq h_0} p_{ji}(h) < \varepsilon, \quad \min_{0 \leq h \leq h_0} p_{ii}(h) > 1 - \varepsilon, \quad \min_{0 \leq h \leq h_0} p_{jj}(h) > 1 - \varepsilon. \quad (1.30)$$

Por lo tanto si  $nh < h_0$  y  $v \leq n$ , entonces la Ecuación 1.29 implica que  $p_{ii}^{jv}(h) > 1 - 2\varepsilon$ . Introduciendo esto en la Ecuación 1.27 se obtiene:

$$p_{ij}(nh) \geq (1 - 2\varepsilon) \sum_{v=0}^{n-1} p_{ij}(h) (1 - \varepsilon) \geq (1 - 3\varepsilon) np_{ij}(h).$$

Y equivalentemente queda:

$$\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geq (1 - 3\varepsilon) \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad (1.31)$$

siempre que  $nh < h_0$ . Si hacemos  $a_{ij} = \liminf_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{p_{ij}(h)}{h} \right\}$ , esto implica que  $a_{ij} < \infty$ .

En efecto si  $a_{ij} = \infty$ , se halla  $h$  arbitrariamente pequeño para que  $\frac{p_{ij}(h)}{h}$  y también por la Ecuación 1.31  $\frac{p_{ij}(nh)}{nh}$  sean arbitrariamente grandes. Por otro lado la elección de  $n$  tal que  $\frac{h_0}{2} \leq nh < h_0$ , la Ecuación 1.30 daría  $\frac{p_{ij}(nh)}{nh} < \frac{\varepsilon}{nh} < \frac{2\varepsilon}{h_0}$ . Por lo tanto



$a_{ij} < \infty$  y falta por demostrar que:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{p_{ij}(h)}{h} \right\} \leq a_{ij}. \quad (1.32)$$

Por la definición de  $a_{ij}$  existe  $h_1 < h_0$  de tal manera que  $\frac{p_{ij}(h_1)}{h_1} < a_{ij} + \varepsilon$ . Dado que  $p_{ij}(h)$  es continua, para todo  $t_0$  lo suficientemente pequeño tal que  $h_1 + t_0 < h_0$  se tiene que  $\frac{p_{ij}(t)}{t} < a_{ij} + \varepsilon$  para  $h - t_0 < t < h_1 + t_0$ . Ahora por la Ecuación 1.31, para cualquier  $h < t_0$  se puede encontrar un número entero  $n_h$  tal que  $h_1 - t_0 < n_h h < h_1 + t_0$  y  $(1 - 3\varepsilon) \frac{p_{ij}(h)}{h} \leq \frac{p_{ij}(n_h h)}{n_h h} < a_{ij} + \varepsilon$ . dado que  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, se obtiene la Ecuación 1.32. Por lo tanto la existencia de los límites  $q_{ij}$  en la Ecuación 1.26 se prueba para  $i \neq j$ . Dado que el espacio de estados  $E$  es finito y la matriz  $\mathbf{P}(h)$  es estocástica, se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} = -\sum_{j \neq i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}. \quad (1.33)$$

Esto completa la demostración.  $\square$

La matriz  $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell}$  es denominada la *matriz de intensidad* y sus entradas  $q_{ij}$  *intensidades de transición*. La matriz de intensidades de transición  $\mathbf{Q}$  en ocasiones es llamada *q-matriz*. En el caso de un espacio de estados finito,  $\mathbf{Q}$  es el generador de  $\{\mathbf{P}(h)\}_{h \geq 0}$  en el sentido de la teoría de semigrafos de transición.

### Corolario 1.3.1.2

Para cada  $i \neq j$ , se tiene que  $q_{ij} \geq 0$ ,  $q_{ii} \leq 0$ . Además  $\mathbf{Qe}^T = 0$ , o equivalentemente para cada  $i \in E$  se tiene  $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ .

#### **Demostración:**

De la Ecuación 1.26 se concluye que  $q_{ij} \geq 0$  y  $q_{ii} \leq 0$ . Por otro lado de la Ecuación 1.33 se tiene que:  $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ .  $\square$

Hay que tener en cuenta que la definición 1.3.1.1 y el teorema 1.3.1.1 son completamente análogos para procesos de Markov en un espacio de estado infinito numerable  $E = \{1, 2, \dots\}$ . El teorema 1.3.1.2 sigue siendo válido en una forma ligeramente modificada. En la demostración del teorema 1.3.1.2, la finitud del espacio de estados no se ha utilizado al probar la existencia y la finitud de  $q_{ij}$  para  $i \neq j$ . En el caso de un espacio de estados infinito numerable, se puede demostrar que los límites  $q_{ii}$  en la Ecuación 1.26 existen, pero pueden ser infinitos. Por otro lado, en lugar de la Ecuación 1.33, se puede demostrar solamente que  $q_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} q_{ij}$  para todo  $i \in E$ . El

caso en el que la igualdad prevalezca es de vital importancia. Una matriz de funciones de transición  $\{\mathbf{P}(h)\}_{h \geq 0}$ , que actúa en un espacio de estados infinito numerable  $E$ , se denomina *conservativa* si  $\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty$  para todo  $i \in E$ .

Un estado  $i \in E$  es llamado *absorbente* si  $q_{ii} = 0$ . La noción de un estado absorbente juega un papel importante en la definición de la clase de distribuciones tipo fase. Alternativamente un estado  $i \in E$  es llamado *estable* si  $0 \leq -q_{ii} < \infty$ , e *instantáneo* si  $-q_{ii} = \infty$ .

### 1.3.2. Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov

En esta sección se muestra que hay una relación uno a uno entre la matriz de funciones de transición y su matriz de intensidad. En una extensión al teorema 1.3.1.2 primero se demostrará que las funciones de transición  $p_{ij}(h)$  son diferenciables para todo  $h \geq 0$ .

#### Teorema 1.3.2.1

Para todo  $i, j \in E$  y  $h \geq 0$ , las funciones de transición  $p_{ij}(h)$  son diferenciables y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$p_{ij}^{(1)}(h) = \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(h). \quad (1.34)$$

#### Demostración:

Sea  $h' > 0$ . A partir de la ecuación de Chapman-Kolmogorov de la Ecuación 1.24 obtenemos:

$$\begin{aligned} p_{ij}(h + h') - p_{ij}(h) &= \sum_{k \in E} p_{ik}(h') p_{kj}(h) - p_{ij}(h) \\ &= \sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h) + [p_{ii}(h') - 1] p_{ij}(h). \end{aligned}$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} p_{ij}(h - h') - p_{ij}(h) &= p_{ij}(h - h') - \sum_{k \in E} p_{ik}(h') p_{kj}(h - h') \\ &= -\sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h - h') - [p_{ii}(h') - 1] p_{ij}(h - h'). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h - h') - p_{ij}(h)}{h'} = \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{-\sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h - h') - [p_{ii}(h') - 1] p_{ij}(h - h')}{h'}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{-\sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h-h')}{h'} - \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{[p_{ii}(h') - 1] p_{ij}(h-h')}{h'} \\
&= -\sum_{k \neq i} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(h')}{h'} p_{kj}(h-h') - \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{[p_{ii}(h') - 1]}{h'} \lim_{h' \rightarrow 0^+} p_{ij}(h-h') \\
&= -\sum_{k \neq i} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(h')}{h'} \lim_{h' \rightarrow 0} p_{kj}(h-h') - q_{ii} p_{ij}(h) \\
&= \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(h) + q_{ii} p_{ij}(h) \\
&= \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(h).
\end{aligned}$$

De manera similar se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h+h') - p_{ij}(h)}{h'} &= \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h) + [p_{ii}(h') - 1] p_{ij}(h)}{h'} \\
&= \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k \neq i} p_{ik}(h') p_{kj}(h)}{h'} + p_{ij}(h) \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{[p_{ii}(h') - 1]}{h'} \\
&= \sum_{k \neq i} \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(h')}{h'} p_{kj}(h) + p_{ij}(h) q_{ii} \\
&= \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(h) + q_{ii} p_{ij}(h) \\
&= \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(h).
\end{aligned}$$

Finalmente como  $\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h-h') - p_{ij}(h)}{h'} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h+h') - p_{ij}(h)}{h'}$ , entonces:

$$p_{ij}^{(1)}(h) = \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(h). \quad \square$$

Las ecuaciones diferenciales en la Ecuación 1.34 se llaman las *ecuaciones de Kolmogorov hacia atras*. En notación matricial la Ecuación 1.34 toma la forma  $\mathbf{P}^{(1)}(h) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(h)$  para todo  $h \geq 0$ . En la misma forma que se demostró la Ecuación 1.34, se puede demostrar que  $\mathbf{P}^{(1)}(h) = \mathbf{P}(h)\mathbf{Q}$  para todo  $h \geq 0$ , la cual es la notación matricial de las *ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante*. La condición inicial para ambas ecuaciones de Kolmogorov es  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ .

### 1.3.3. Saltos en los Procesos de Markov

Sea  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$  una  $\sigma$ -álgebra. Una variable aleatoria no negativa  $\tau$  es llamada un tiempo de parada para  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  si  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  para todo  $t$ . La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$

consta de los conjuntos medibles  $A$  tales que  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Cualquier proceso de Markov de salto  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  satisface la propiedad fuerte de Markov, es decir:

$$P(X_{t+h_1} = i_1, \dots, X_{t+h_n} = i_n \mid \mathcal{F}_\tau) = P(X_{h_1} = i_1, \dots, X_{h_n} = i_n \mid X_0 = X_\tau).$$

A menudo  $\tau$  se define en términos de los valores de  $X_t$  tal que  $X_\tau$  es determinista. Por ejemplo  $\tau$  podría ser la primera vez que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  esta en el estado  $i$ . En este caso  $X_\tau = i$  y  $\{X_0 = X_\tau\} = \{X_0 = i\}$ . Sea  $W_0 = 0 < W_1 < W_2 < \dots$  los tiempos de los saltos. Las diferencias  $T_n = W_{n+1} - W_n$  son los tiempos entre saltos. Por lo tanto  $T_0$  es el tiempo hasta el primer salto,  $T_1$  es el tiempo entre el primer y segundo salto y así sucesivamente. Finalmente sean  $V_0, V_1, \dots$  la secuencia de estados visitados, es decir,  $V_i = X(W_i) = i$ . En caso que existiera un último  $W_n$  (por ejemplo, si existe un estado absorbente), entonces  $T_n = T_{n+1} = \dots = \infty$  y  $V_n = V_{n+1} = \dots = i$  si  $X(W_n) = i$ . Es claro que las trayectorias de  $X_t$  se pueden reconstruir conociendo  $\{(V_n, T_n)\}_{n \geq 0}$ . Entonces la distribución conjunta de  $(V_n, T_n)$  es de principal interés.

### Teorema 1.3.3.1

Sea  $p_n = P_i(V_k = i_k, T_{k-1} > t_k)$  con  $k = 1, \dots, n$ , entonces existen números  $\lambda_i \geq 0$  y una matriz de transición  $\mathbf{Q}$  tal que:

$$p_n = \prod_{k=1}^n q_{i_{k-1}i_k} e^{-\lambda_{i_{k-1}} t_k}. \quad (1.35)$$

#### Demostración:

Defínase  $f(t) = P_i(T_0 > t)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} f(t+s) &= P_i(T_0 > t+s) \\ &= E_i(P_i(T_0 > t+s \mid \mathcal{F}_t)) \\ &= E_i(P_i(T_0 > t+s, T_0 > t \mid \mathcal{F}_t)) \\ &= E_i(I\{T_0 > t\} P_i(T_0 > t+s \mid \mathcal{F}_t)) \\ &= E_i(I\{T_0 > t\} P_i(T_0 > s)) \\ &= f(t) f(s). \end{aligned}$$

Dado que  $f$  es no creciente se tiene que  $f$  es de la forma  $f(t) = e^{-\lambda_i t}$  para algunos  $\lambda_i \geq 0$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P_i(V_1 = j, T_0 > t) &= E_i(P_i(V_1 = j, T_0 > t \mid \mathcal{F}_t)) \\ &= E_i(I\{T_0 > t\} P_i(V_1 = j)) \\ &= q_{ij} e^{-\lambda_i t}, \end{aligned}$$

donde  $q_{ij} = P_i(V_1 = j)$ . La fórmula general sigue por inducción y la propiedad fuerte de Markov. Supóngase que  $p_m$  es válido para  $m = n - 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
p_n &= P_i(V_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \dots, n) \\
&= P_i(V_n = i_n, T_{n-1} > t_n, V_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \dots, n-1) \\
&= E_i\left(P_i\left(V_n = i_n, T_{n-1} > t_n, V_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \dots, n-1 \mid \mathcal{F}_{S_{n-1}}\right)\right) \\
&= E_i\left(I\{V_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \dots, n-1\} P_i(V_n = i_n, T_{n-1} > t_n, \mid \mathcal{F}_{S_{n-1}})\right) \\
&= P_{i_{n-1}}(V_1 = i_n, T_0 > t) p_{n-1} \\
&= q_{i_{n-1}i_n} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n} p_{n-1}.
\end{aligned}$$

Luego el resultado se sigue por inducción.  $\square$

### Corolario 1.3.3.1

Existen números  $\lambda_i \geq 0$  tales que  $\{T_n\}$  son condicionalmente independientes con  $T_n \sim \exp(\lambda_{V_n})$ .

#### ***Demostración:***

Observese que:

$$\begin{aligned}
&P_i(T_0 > t_0, \dots, T_{n-1} > t_{n-1} \mid V_1 = i_1, \dots, V_n = i_n) \\
&= \frac{P_i(T_0 > t_0, \dots, T_{n-1} > t_{n-1}, V_1 = i_1, \dots, V_n = i_n)}{P_i(V_1 = i_1, \dots, V_n = i_n)}.
\end{aligned}$$

Pero según la Ecuación 1.35:

$$\begin{aligned}
&P_i(T_0 > t_0, \dots, T_{n-1} > t_{n-1} \mid V_1 = i_1, \dots, V_n = i_n) \\
&= \frac{\prod_{k=1}^n q_{i_{k-1}i_k} e^{-\lambda_{i_{k-1}} t_k}}{\prod_{k=1}^n q_{i_{k-1}i_k}} \quad (i_0 = i) \\
&= \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_{i_{k-1}} t_k}.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica la independencia condicional y que las distribuciones son exponenciales.  $\square$

Con esto se demuestra que si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de salto Markov entonces existe números  $\lambda_i \geq 0$  y probabilidades  $q_{ij}$  con las propiedades anteriores. Sea  $W_n = T_0 + \dots + T_{n-1}$  con  $W_0 = 0$  el tiempo de la  $n$ -ésima transición y sea  $\omega(\Delta) = \sup_n W_n$ . Si  $\omega(\Delta) < \infty$  se dice que el proceso de markov es explosivo lo cual es una propiedad no deseable la cual se descartara imponiendo condiciones adicionales sobre la estructura del proceso.

**Teorema 1.3.3.2**

Sea  $R = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1}$ , entonces se tiene que  $R < \infty \iff \omega(\Delta) < \infty$ .

**Demostración:**

Si  $V_n = i$  entonces  $T_n \sim \lambda_i^{-1} \exp(1)$ . Ahora:

$$\omega(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Así que:

$$\omega(\Delta) \mid V_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1} B_n,$$

donde  $\{B_n\}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\exp(1)$ . Además:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1} = E \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1} B_n \mid \{V_n\} \right) = E(\omega(\Delta) \mid \{V_n\}).$$

Tal que si  $R < \infty$  entonces  $\omega(\Delta) < \infty$ . Por otro lado, si  $\omega(\Delta) < \infty$ , entonces queda que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(\lambda_{V_n}^{-1} B_n) < \infty.$$

Pero la expresión anterior es exactamente  $R$ . Por tanto  $R < \infty$ .  $\square$

**Corolario 1.3.3.2**

Los siguientes criterios son suficientes para que  $P(\omega(\Delta) < \infty) = 0$ .

1.  $\sup_i \lambda_i < \infty$ .
2.  $E$  es finito.
3.  $V_n$  es recurrente.

**Demostración:**

Si el proceso es explosivo entonces  $\omega(\Delta) < \infty$  y por lo tanto  $R = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1} < \infty$ , implica que  $\lambda_{V_n} \rightarrow \infty$ , lo cual es imposible si  $\sup_n \lambda_n < \infty$ . Si  $E$  es finito se tiene que  $\sup_n \lambda_n < \infty$ . Si  $\{V_n\}$  es recurrente entonces  $\{\lambda_{V_n}\}$  es recurrente y  $\lambda_i$  aparecería a menudo infinitamente en  $\{\lambda_{V_n}\}$ , lo cual hace que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  sea imposible y por lo tanto, necesariamente  $R = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{V_n}^{-1} = \infty$ .  $\square$

En lo que sigue se supone que  $\lambda_i > 0$  para todo  $i$  y que la cadena de Markov  $\{V_n\}$  tiene matriz de transición  $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ . En particular,  $q_{ii} = 0$  por definición de  $V_n$ .

**Definición 1.3.3.1**

La matriz de intensidad (o generador infinitesimal)  $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$  de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  esta definida por  $q_{ij} = \lambda_i p_{ij}$  para  $i \neq j$  y  $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} = -\lambda_i$ .

Observe que la suma de los elementos de las filas de  $\mathbf{Q}$  es cero. Puesto que los tiempos de espera en cada estado  $i$  se distribuyen de manera exponencial  $\exp(-\lambda_i)$ , la probabilidad de un salto fuera del estado  $i$  durante el intervalo de tiempo  $[t, t + dt)$  es  $\lambda_i dt$  o formalmente  $\lambda_i h + o(h)$ , donde  $o(h)$  es una función tal que  $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Condicionalmente en el caso de que haya un salto en  $[t, t + dt)$  y  $X_{t-} = i$  (límite por la izquierda), la probabilidad de que el siguiente estado al que salta el proceso sea  $j$  es  $p_{ij}$ . Por lo tanto la probabilidad de saltar de un estado  $i$  al estado  $j$  durante  $[t, t + dt)$  es  $\lambda_i dt p_{ij} = q_{ij} dt$ .

**Definición 1.3.3.2**

Para una matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  de tamaño  $\ell \times \ell$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h\mathbf{A})^n}{n!}$  es una función matricial bien definida la cual es continua con respecto a  $h$  en todo  $\mathbb{R}$ . Se llamará a esta función, la función matricial exponencial y se denota por:

$$e^{(h\mathbf{A})} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \cdots + \frac{(h\mathbf{A})^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h\mathbf{A})^n}{n!}.$$

$$\text{Si } E \text{ es finito, entonces } \mathbf{P}^t = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n t^n}{n!}.$$

**1.4. Procesos de Poisson**

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1] y [4].

Supóngase que un mismo evento ocurre repetidas veces de manera aleatoria a lo largo del tiempo. Supóngase también que las variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  representan los tiempos que transcurren entre una ocurrencia del evento y la siguiente ocurrencia. Supóngase que estos tiempos son independientes uno del otro y que cada uno tiene distribución  $\exp(-\lambda)$ . Se define el proceso de Poisson al tiempo  $t$  como el número de ocurrencias del evento que se han observado hasta ese instante  $t$ . Esta es una definición constructiva de este proceso y se formaliza a continuación.

**Definición 1.4.1**

Considérese  $0 < W_1 < W_2 < \dots$  como los tiempos de llegada de ciertos eventos y sea  $N_t$  el número de llegadas observadas en  $(0, t]$  es decir:

$$N_t = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid W_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} I \{W_n \leq t\}.$$

Entonces  $N_t$  son variables aleatorias y la colección  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico. Este tipo de proceso se denomina un proceso de conteo, ya que se incrementa paso a paso con incrementos de una unidad.

**Definición 1.4.2**

Sea  $T_1, T_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución  $\exp(\lambda)$ . El proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  es el proceso de conteo a tiempo continuo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  definido de la siguiente manera:

$$N_t = \max \{n \in \mathbb{N} : T_1 + \dots + T_n \leq t\}.$$

Se supone que el proceso comienza en cero y para ello se define  $\max \emptyset = 0$ .  $N_t$  es el entero  $n$  máximo tal que  $T_1 + \dots + T_n$  es menor o igual a  $t$  y ello equivale a contar el número de eventos ocurridos hasta el tiempo  $t$ . A este proceso se le llama proceso de Poisson homogéneo, tal adjetivo se refiere a que el parámetro  $\lambda$  no cambia con el tiempo, es decir es *homogéneo* en el tiempo. A los tiempos  $T_1, T_2, \dots$  se les llama *tiempos de estancia* o *tiempos de inter-arribo*. En consecuencia la variable  $W_n = T_1 + \dots + T_n$  tiene distribución  $\text{gamma}(n, \lambda)$  y representa el tiempo real en el que se observa la ocurrencia del  $n$  –ésimo evento. Una de las características sobresalientes de este proceso es que puede encontrarse explícitamente la distribución de probabilidad de la variable  $N_t$  para cualquier valor de  $t > 0$  por medio de la distribución Poisson, por esta razón es que el proceso adquiere su nombre.

**Teorema 1.4.1**

Si  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ , entonces  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  para todo  $t$ .

**Demostración:**

Sea  $P_n(t) = P(N_t = n)$ .

Supóngase que  $n = 0$ , por lo tanto:

$$P_0(t+h) = P(0 \text{ llegadas en } [0, t] \cap 0 \text{ llegadas en } [t, t+h])$$



$$\begin{aligned}
&= P_0(t) P(N_{t+h} - N_t = 0) \\
&= P_0(t) P(N_h = 0) \\
&= P_0(t) [1 - \lambda h + o(h)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + P_0(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}.$$

Es decir se obtiene la siguiente ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t), \text{ con } P_0(0) = 1$$

Cuya solución es:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Sea ahora  $n > 0$ , entonces en el intervalo  $t+h$  ocurren  $n$  llegadas, es decir  $N_{t+h} = n$  si:

1. Suceden  $n$  eventos en  $[0, t]$  y 0 eventos en  $[t, t+h]$ .
2. Suceden  $n-1$  eventos en  $[0, t]$  y 1 evento en  $[t, t+h]$ .
3. Suceden  $n-k$  eventos en  $[0, t]$  y  $k$  eventos en  $[t, t+h]$ , con  $k = 2, 3, \dots, n$ .

Acumulando las probabilidades asociadas se obtiene:

$$P_n(t+h) = P_n(t) [1 - \lambda h + o(h)] + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h).$$

Por lo tanto:

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \right) \\
&= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Es decir se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \text{ con } P_n(0) = 0.$$

Cuya solución es:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}. \quad \square$$

Dado que  $N_t$  tiene una distribución *Poisson* ( $\lambda t$ ), se tiene que  $E(N_t) = Var(N_t) = \lambda t$ . Por lo tanto  $\lambda t$  es el promedio de observaciones o registros del evento de interés en el intervalo  $[0, t]$ .

Una de las propiedades que caracterizan de manera única a la distribución exponencial dentro del conjunto de distribuciones absolutamente continuas es que satisface

la propiedad de *pérdida de memoria*, esto es, si  $T$  tiene distribución  $\exp(\lambda)$ , entonces para cualesquiera tiempos  $s, t > 0$  se cumple la igualdad:

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t).$$

En otras palabras la variable  $T - s$  condicionada al evento  $\{T > s\}$ , sigue teniendo distribución  $\exp(\lambda)$ . Esto significa que, para un valor de  $s \geq 0$  fijo, todos los tiempos de inter-arribo a partir de  $s$ , incluyendo el primero, siguen teniendo distribución  $\exp(\lambda)$ , y por lo tanto el proceso de conteo de eventos a partir del tiempo  $s$  es un proceso de Poisson. Se demuestra a continuación que los incrementos de este proceso son estacionarios y tienen distribución Poisson.

### **Teorema 1.4.2**

Para cualesquiera tiempos  $0 \leq s < t$ , y para  $n = 0, 1, \dots$  se tiene que:

$$P(N_t - N_s = n) = P(N_{t-s} = n) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}. \quad (1.36)$$

#### **Demostración:**

Por el teorema de probabilidad total, se tiene que:

$$P(N_t - N_s = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t - N_s = n \mid N_s = k) P(N_s = k).$$

Dado que al tiempo  $s$  el proceso de Poisson se encuentra en el nivel  $k$ , por la propiedad de pérdida de memoria se puede considerar que en ese momento reinicia el proceso de Poisson, y la probabilidad del evento  $\{N_t - N_s = n\}$  es igual a la probabilidad del evento  $\{N_{t-s} = n\}$ . Es decir:

$$\begin{aligned} P(N_t - N_s = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{t-s} = n) P(N_s = k) \\ &= P(N_{t-s} = n) \sum_{k=0}^{\infty} P(N_s = k) \\ &= P(N_{t-s} = n). \quad \square \end{aligned}$$

Lo anterior significa que no solamente la variable  $N_t$  del proceso de Poisson tiene distribución  $Poisson(\lambda t)$ , sino también los incrementos  $N_t - N_s$  tienen distribución Poisson, ahora con parámetro  $\lambda(t-s)$ , cuando  $0 \leq s < t$ .

### **Proposición 1.4.1**

El proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  satisface las siguientes propiedades:

1. Es un proceso de Markov.

2. *Tiene incrementos independientes.*

3. *Tiene incrementos estacionarios.*

***Demostración:***

Para probar (1), se consideran las probabilidades condicionales:

$$P(N_{t_n} = i_n \mid N_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, N_{t_1} = i_1) \text{ y } P(N_{t_n} = i_n \mid N_{t_{n-1}} = i_{n-1}),$$

para cualesquiera  $n$  tiempos  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , y cualesquiera estados  $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$ . En ambos casos se establece que en el tiempo  $t_{n-1}$  ha habido  $i_{n-1}$  ocurrencias del evento en cuestión. A partir de ese momento inicia un nuevo proceso de Poisson y para que en el tiempo  $t_n$  haya  $i_n$  ocurrencias es necesario que en el intervalo de tiempo  $(t_{n-1}, t_n]$  hayan ocurrido  $i_n - i_{n-1}$  eventos. Ambas probabilidades coinciden entonces con la probabilidad  $P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1})$  y esto demuestra la propiedad de Markov.

Para probar (2) se considera cualesquiera  $n$  tiempos  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , y cualesquiera estados  $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$ . Por conveniencia se llamara  $s_n$  a la suma  $i_1 + \dots + i_n$ , para cada  $n \geq 1$ . Por la propiedad de Markov y por la propiedad de pérdida de memoria, la probabilidad conjunta:

$$P(N_{t_1} = i_1, N_{t_2} - N_{t_1} = i_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n),$$

es igual a:

$$\begin{aligned} & P(N_{t_1} = s_1, N_{t_2} = s_2, \dots, N_{t_n} = s_n) \\ &= P(N_{t_1} = s_1) P(N_{t_2} = s_2 \mid N_{t_1} = s_1) \dots P(N_{t_n} = s_n \mid N_{t_{n-1}} = s_{n-1}) \\ &= P(N_{t_1} = s_1) P(N_{t_2} - N_{t_1} = i_2) \dots P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n). \end{aligned}$$

La propiedad (3) es consecuencia inmediata de la Ecuación 1.36. La estacionariedad de los incrementos significa que la distribución de la variable  $N_t - N_s$ , para  $0 \leq s < t$ , depende de  $s$  y de  $t$  únicamente a través de la diferencia  $t - s$ , lo cual es evidente de la Ecuación 1.36.  $\square$

La Definición 1.4.2 de proceso de Poisson es constructiva pues a partir de los tiempos de inter-arribo se construye el proceso de conteo correspondiente. Existen otras formas equivalentes y un tanto axiomáticas de definir a este proceso. Se comentará a continuación una de ellas.

***Definición 1.4.3***

*Un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$  es un proceso de conteo a tiempo continuo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados  $\{0, 1, \dots\}$  y que cumple las siguientes propiedades:*

1.  $N_0 = 0$ .

2. Tiene incrementos independientes y estacionarios.
3.  $P(N_{t+h} - N_t = 1) = P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$ , con  $t \geq 0$  y  $h \rightarrow 0$ .
4.  $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = P(N_h \geq 2) = o(h)$ , con  $t \geq 0$  y  $h \rightarrow 0$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 P(N_h = 0) &= P(N_h < 1) = 1 - P(N_h \geq 1) = 1 - [P(N_h = 1) + P(N_h \geq 2)] \\
 &= 1 - [\lambda h + o(h) + o(h)] \\
 &= 1 - \lambda h + o(h).
 \end{aligned}$$

Esta definición hace uso de las probabilidades infinitesimales del proceso y ello tiene algunas ventajas desde el punto de vista de la interpretación de lo que sucede en un intervalo infinitesimal de tiempo  $(t, t+h]$ . El proceso empieza en cero y según lo anterior la probabilidad de que pase al estado uno al final de un intervalo de tiempo pequeño  $(0, h]$  es  $\lambda h + o(h)$ , la probabilidad de que el proceso no tenga ningún cambio en dicho intervalo es  $1 - \lambda h + o(h)$ , y finalmente la probabilidad de que el proceso tenga dos o más incrementos en tal intervalo es  $o(h)$ . Es decir, en un intervalo cualquiera de longitud infinitesimal  $h$  sólo pueden ocurrir dos situaciones: que haya un incremento o que no lo haya.

### Teorema 1.4.3

Si  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes y  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  para todo  $t$ , entonces los tiempos entre llegadas  $T_1, T_2, \dots$ , son independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\exp(\lambda)$ , donde  $T_1 = W_1, T_2 = W_2 - W_1, \dots, T_n = W_n - W_{n-1}$ , con  $0 < W_1 < W_2 < \dots$  como los tiempos de llegada de ciertos eventos.

#### Demostración:

Primero se probará que  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  tienen incrementos estacionarios, donde  $N_{t+h} \sim \text{Poisson}(\lambda(t+h))$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
 e^{(\lambda z - \lambda)(t+h)} &= E(z^{N_{t+h}}) \\
 &= E(z^{N_{t+h} - N_h} z^{N_h}) \\
 &= E(z^{N_{t+h} - N_h}) E(z^{N_h}) \\
 &= E(z^{N_{t+h} - N_h}) e^{(\lambda z - \lambda)h}.
 \end{aligned}$$

Lo anterior significa que  $E(z^{N_{t+h} - N_h}) = e^{(\lambda z - \lambda)t}$ . Por tanto se tiene que  $N_{t+h} - N_h \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ . Entonces la distribución de  $N_{t+h} - N_h$  no depende de  $h$ . Ahora se debe calcular la densidad conjunta  $f$  de los tiempos entre llegadas. Sea  $t_0 = 0 \leq w_1 < t_1 \leq w_2 < t_2 \leq w_3 < t_3 \leq \dots \leq w_n < t_n$ . Entonces:

$$\mathbb{P}(w_k < W_k < t_k, k = 1, \dots, n)$$

$$= \mathbb{P} \left( N_{(t_{k-1}, w_k)} = 0, N_{(w_k, t_k)} = 1, k = 1, \dots, n-1, N_{(t_{n-1}, w_n)} = 0, N_{(w_n, t_n)} \geq 1 \right).$$

Lo anterior ocurre ya que el evento  $W_n \in [w_n, t_n]$  no excluye que  $W_m \in [w_n, t_n]$ , para  $m > n+1$ . Este fenómeno, sin embargo, no ocurre en las anteriores  $n-1$  llegadas ya que por construcción las llegadas se colocan en intervalos disjuntos. Usando  $N_{(a,b)} = N_b - N_a$  y los incrementos independientes y estacionarios, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(w_k < W_k < t_k, k = 1, \dots, n) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda(t_n - w_n)}\right) e^{-\lambda(w_n - t_{n-1})} \prod_{k=1}^{n-1} \left( \lambda (t_k - w_k) e^{-\lambda(t_k - w_k)} e^{-\lambda(w_k - t_{k-1})} \right) \\ &= \left(e^{-\lambda w_n} - e^{-\lambda t_n}\right) \lambda^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - w_k). \end{aligned}$$

Ahora  $\int_{w_n}^{t_n} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \left(e^{-\lambda w_n} - e^{-\lambda t_n}\right)$  da como resultado:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w_k < W_k < t_k, k = 1, \dots, n) &= \lambda^n \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - w_k) \int_{w_n}^{t_n} e^{-\lambda y_n} dy_n \\ &= \int_{w_1}^{t_1} \cdots \int_{w_{n-1}}^{t_{n-1}} \int_{w_n}^{t_n} \lambda^n e^{-\lambda y_n} dy_n dy_{n-1} \cdots dy_1. \end{aligned}$$

Por tanto la densidad conjunta de  $(W_1, \dots, W_n)$  está dada por:

$$f_{(W_1, \dots, W_n)}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda y_n} & \text{si } 0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Para calcular la densidad de  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$  se hace uso de un argumento de transformación estándar. Si  $g(W_1, \dots, W_n) \rightarrow (W_1, W_2 - W_1, \dots, W_n - W_{n-1})$ , entonces  $g$  es una transformación lineal dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 - W_1 \\ W_3 - W_2 \\ W_4 - W_3 \\ \vdots \\ W_n - W_{n-1} \end{bmatrix}$$

El Jacobiano de  $g$  es la matriz de coeficientes del sistema anterior llamada  $T$ , cuya inversa es:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Su determinante es 1 y el teorema de transformación afirma que:

$$f_{(T_1, \dots, T_n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{(W_1, \dots, W_n)}(g^{-1}(x_1, \dots, x_n))}{J_g(g^{-1}(x_1, \dots, x_n))}.$$

El denominador es 1 y además:

$$f_{(T_1, \dots, T_n)}(x_1, \dots, x_n) = f_{(W_1, \dots, W_n)}(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n) \text{ para todo } x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$f_{(T_1, \dots, T_n)}(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} = \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k}$$

Lo cual es un producto de densidades de distribuciones exponenciales. Por lo tanto  $T_1, \dots, T_n$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\exp(\lambda)$   $\square$

### Teorema 1.4.4

Sea  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  y  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  dos procesos de Poisson independientes con intensidad  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces el proceso  $\{M_t + N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\alpha + \beta$ .

#### Demostración:

Primero se verá que  $M_{S+t} - M_t$  tiene distribución *poisson*  $(\alpha t)$ , donde  $S$  es una variable aleatoria continua con soporte el intervalo  $(0, \infty)$  e independiente del proceso  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  y  $t > 0$ . En efecto para cualquier entero  $k \geq 0$ , y bajo el supuesto que  $F(s)$  es la función de distribución de  $S$  se tiene:

$$\begin{aligned} P(M_{S+t} - M_t = k) &= \int_0^\infty P(M_{s+t} - M_t = k \mid S = s) dF(s) \\ &= \int_0^\infty P(M_{s+t} - M_t = k) dF(s) \\ &= \int_0^\infty P(M_t = k) dF(s) \\ &= P(M_t = k) \end{aligned}$$

Ahora sea  $T_1, T_2, \dots$  los tiempos de inter-arribo del proceso  $\{M_t + N_t\}_{t \geq 0}$ . Se demostrará que estas variables aleatorias son independientes con idéntica distribución  $\exp(\alpha + \beta)$ .

El termino  $M_{[s,t]}$  denotara la diferencia  $M_t - M_s$ , para  $0 \leq s < t$ . Entonces para cualquier valor natural de  $n$  y para cualesquiera tiempos  $t_1, \dots, t_n$ , el evento:

$(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_n > t_n)$ , puede expresarse como:

$$\left( (M + N)_{[0, t_1]} = 0, (M + N)_{[T_1, T_1 + t_2]} = 0, \dots, (M + N)_{[T_{n-1}, T_{n-1} + t_n]} = 0 \right).$$

Es decir:

$$\left( M_{[0, t_1]} = 0 \right) \cap \left( N_{[0, t_1]} = 0 \right)$$

$$\cap \left( M_{[T_1, T_1+t_2]} = 0 \right) \cap \left( N_{[T_1, T_1+t_2]} = 0 \right)$$

...

$$\cap \left( M_{[T_{n-1}, T_{n-1}+t_n]} = 0 \right) \cap \left( N_{[T_{n-1}, T_{n-1}+t_n]} = 0 \right)$$

Por la independencia de los procesos, la propiedad de incrementos independientes de cada uno de ellos, y del hecho que  $M_{S+t} - M_t$  tiene distribución *poisson* ( $\alpha t$ ), la probabilidad del evento anterior es:

$$P \left( M_{[0, t_1]} = 0 \right) P \left( N_{[0, t_1]} = 0 \right)$$

$$P \left( M_{[T_1, T_1+t_2]} = 0 \right) P \left( N_{[T_1, T_1+t_2]} = 0 \right)$$

...

$$P \left( M_{[T_{n-1}, T_{n-1}+t_n]} = 0 \right) P \left( N_{[T_{n-1}, T_{n-1}+t_n]} = 0 \right)$$

Por lo tanto:

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_n > t_n) = e^{-(\alpha+\beta)t_1} e^{-(\alpha+\beta)t_2} \dots e^{-(\alpha+\beta)t_n}$$

Esta identidad demuestra que las variables  $T_1, T_2, \dots$  son independientes con idéntica distribución  $\exp(\alpha + \beta)$ , es decir que  $\{M_t + N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\alpha + \beta$ .  $\square$

### 1.4.1. Proceso de Poisson Compuesto

Esta es una de las generalizaciones del proceso de Poisson más conocidas y de amplia aplicación. La generalización consiste en que los saltos no son necesariamente unitarios.

#### **Definición 1.4.1.1**

Sea  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Poisson y sea  $Y_1, Y_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas e independientes del proceso Poisson. Sea  $Y_0 = 0$ . El proceso de Poisson compuesto se define de la siguiente forma:

$$X_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i.$$

Obsérvese que la variable  $X_t$  del proceso de Poisson compuesto es una suma de variables aleatorias en donde el número de sumandos es aleatorio. Tal tipo de modelos encuentra aplicación natural en distintos contextos. Cuando las variables  $Y_1, Y_2, \dots$  toman valores en el conjunto  $\{1, 2, \dots\}$  se dice que este proceso es un proceso de Poisson generalizado, pues los saltos ya no son necesariamente unitarios. Obsérvese que si las variables  $Y_1, Y_2, \dots$  son todas idénticamente uno, el proceso de Poisson compuesto se reduce al proceso de Poisson. El proceso de Poisson compuesto cumple las siguientes propiedades:

1. Tiene incrementos independientes y estacionarios.
2.  $E(X_t) = \lambda t E(Y)$ .
3.  $Var(X_t) = \lambda t E(Y^2)$ .
4.  $Cov(X_t, X_s) = \lambda E(Y^2) \min(s, t)$ .
5. La función generadora de momentos de la variable  $X_t$  es  $M_{X_t}(u) = e^{[\lambda t(M_Y(u)-1)]}$ .

## 1.5. Procesos de Renovación

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1] y [4].

A continuación se presenta una generalización del proceso de Poisson. Se considera que los tiempos de inter-arribo no son necesariamente exponenciales. A tales procesos de saltos unitarios se les denomina procesos de renovación, y en general dejan de cumplir la propiedad de Markov. Esta sección es breve y se presentan sólo algunos aspectos elementales de los procesos de renovación.

Supongamos que se pone en operación un cierto componente cuya duración de vida útil se modela mediante una variable aleatoria  $T_1$ . Una vez que el componente falla se reemplaza con otro componente cuyo tiempo de vida es  $T_2$ , y así sucesivamente. La colección de variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  representa la sucesión de tiempos de vida de componentes puestos en operación uno tras otro. En este contexto es natural suponer que las variables que modelan los tiempos de vida son no negativas, independientes y con la misma distribución de probabilidad. Un proceso con estas características se denomina proceso de renovación. Obsérvese que exactamente en los tiempos en los que se efectúan las renovaciones, el proceso reinicia probabilísticamente.

### Definición 1.5.1

*Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.*

Otra forma equivalente de definir a este proceso es por medio del registro de los tiempos reales en los que se observan las renovaciones, o a través del conteo de renovaciones observadas hasta un tiempo  $t$  cualquiera.

### Definición 1.5.2

*Dado un proceso de renovación  $\{T_1, T_2, \dots\}$ , se definen los tiempos reales de renovación como  $W_0 = 0$  y  $W_n = W_1 + \dots + W_n$ , para  $n \geq 1$ . El proceso de conteo de*



renovaciones para cada  $t \geq 0$  es:

$$N_t = \max \{n \geq 0 : W_n \leq t\}.$$

La variable aleatoria  $W_n$  representa el tiempo real en el que se realiza la  $n$  -ésima renovación, mientras que  $N_t$  indica el número de renovaciones efectuadas hasta el tiempo  $t$ . Se considera proceso de renovación a cualquiera de los procesos  $\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ ,  $\{W_n\}_{n=0,1,\dots}$  o  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , pues por construcción existe una correspondencia biunívoca entre cualesquiera dos de estos procesos.

Se denota por  $F(t)$  la función de distribución de los tiempos de vida. Luego, la función de distribución de  $W_n$  es la convolución de  $F(t)$  consigo misma  $n$  veces, es decir:

$$F_{W_n}(t) = P(T_1 + \dots + T_n \leq t) = F^{*n}(t) = (F * \dots * F)(t).$$

Es de vital importancia conocer la distribución de la variable  $N_t$ . Esto no es fácil de hacer, pues la distribución de esta variable depende de la distribución de los tiempos de vida como indica la siguiente fórmula general.

### **Proposición 1.5.1**

Para cualquier  $n \geq 0$  se tiene que:

$$P(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t).$$

#### **Demostración:**

Considerando que  $S_n$  y  $T_{n+1}$  son independientes, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(W_n \leq t, W_{n+1} > t) \\ &= P(W_n \leq t, W_n + T_{n+1} > t) \\ &= P(t - T_{n+1} < W_n \leq t) \\ &= F_{W_n}(t) - F_{W_n}(t - T_{n+1}) \\ &= F^{*n}(t) - \int_0^\infty F_{W_n|T_{n+1}}(t - u | u) dF(u) \\ &= F^{*n}(t) - \int_0^\infty F^{*n}(t - u) dF(u) \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t). \quad \square \end{aligned}$$

En muy pocos casos es posible encontrar la distribución explícita del número de renovaciones  $N_t$ . Salvo cuando los tiempos de vida son exponenciales se sabe que la respuesta es la distribución Poisson.

Otro aspecto que se desea conocer en un proceso de renovación es el número promedio de renovaciones efectuadas hasta un tiempo  $t$  cualquiera. A lo cual se le denomina

*función de renovación*, y definida por  $\varphi(t) = E(N_t)$ . En general tampoco es fácil encontrar una forma explícita para determinar esta función. Sin embargo, se cuenta con la siguiente ecuación integral general.

### **Proposición 1.5.1.1**

La función de renovación  $\varphi(t)$  satisface la ecuación:

$$\varphi(t) = F(t) + \int_0^t \varphi(t-s) dF(s), \quad (1.37)$$

donde  $F(t)$  la función de distribución de los tiempos de vida.

#### **Demostración:**

Condicionando sobre el valor del primer tiempo de vida  $T_1$  se obtiene que:

$$\varphi(t) = \int_0^\infty E(N_t | T_1 = s) dF(s).$$

Donde:

$$E(N_t | T_1 = s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t \\ 1 + \varphi(t-s) & \text{si } s \leq t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t (1 + \varphi(t-s)) dF(s) \\ &= \int_0^t dF(s) + \int_0^t \varphi(t-s) dF(s) \\ &= F(t) + \int_0^t \varphi(t-s) dF(s). \quad \square \end{aligned}$$

Obsérvese que la Ecuación 1.37 puede escribirse como  $\varphi(t) = F(t) + (\varphi * F)(t)$ . Debido a que se condiciona sobre el valor del primer tiempo de renovación, a la demostración de este resultado se le denomina *análisis del primer paso* o que se ha empleado un argumento de renovación, pues es muy frecuente su uso en el cálculo de probabilidades de ciertos eventos en los procesos de renovación.

## 2. Riesgo y Probabilidad de Ruina

Los referentes teóricos de este capítulo fueron tomados de [10], [11], [12], [13], [14], [15] y [16].

Se presenta una introducción al esquema del seguro y al concepto general de riesgo desde una perspectiva individual y colectiva para modelar el riesgo correspondiente al conjunto de reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. Posteriormente se asume el modelo colectivo como modelo fundamental.

El *riesgo* puede definirse como la posibilidad de experimentar ciertos eventos de interés y las consecuencias derivadas de dichos eventos. Pueden tener un sentido positivo o negativo, pero en general tienen una connotación de pérdida. En seguros el riesgo puede definirse como el monto de las reclamaciones totales de los asegurados.

En general la forma en la que opera un seguro es la siguiente. Un grupo de personas reconocen que están expuestas a sufrir algún tipo de siniestro y que dichos siniestros pueden causarles efectos irreparables. Al contratar un seguro, cada una de estas personas paga por adelantado una cantidad de dinero llamada *prima* a una compañía aseguradora, quien se compromete a indemnizar monetariamente a todas aquellas personas aseguradas que sufrieron algún siniestro durante el tiempo de vigencia del seguro. Es claro que el número de siniestros, los momentos en los que éstos se presentan y el monto de las reclamaciones son variables aleatorias.

### 2.1. Modelo Individual

Supongamos que se tiene un portafolio de  $n$  pólizas individuales de seguros válidas por un tiempo determinado. Sea  $p_i$  la probabilidad de que el  $i$  –ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación durante el tiempo de vigencia del seguro, y sea  $q_i$  la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación por el  $i$  –ésimo asegurado. Supongamos que  $p_i + q_i = 1$  (no puede haber más de una reclamación por cada asegurado). Defínase la variable aleatoria:

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamación en la póliza } i \\ 0 & \text{si no hay reclamación en la póliza } i \end{cases}.$$

Es claro que  $D_i \sim \text{Ber}(q_i)$  y que el número total de reclamaciones está dado por la variable aleatoria  $N = D_1 + \dots + D_n$ . Supóngase que cada póliza efectúa una reclamación y sea la variable aleatoria  $C_i > 0$  el monto de la reclamación efectuada por la póliza  $i$ . La verdadera reclamación de la póliza  $i$  está dada por el producto:

$$D_i C_i = \begin{cases} C_i & \text{si } D_i = 1 \\ 0 & \text{si } D_i = 0 \end{cases}.$$

### Definición 2.1.1

*El monto de reclamaciones agregadas, o también llamado agregado de reclamaciones, en el modelo individual, es la variable aleatoria:*

$$S = \sum_{i=1}^n D_i C_i, \quad (2.1)$$

*donde  $D_1, \dots, D_n$  y  $C_1, \dots, C_n$  son variables aleatorias independientes con  $C_i > 0$  y  $D_i \sim \text{Ber}(q_i)$*

La variable aleatoria  $S$  es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro y se denomina *riesgo*. La Ecuación 2.1 representa el modelo individual para una póliza de seguros con las características anteriores.

## 2.2. Modelo Colectivo

Considérese un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo  $[0, T]$ . Sea  $N$  la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo y sean las variables positivas  $Y_1, \dots, Y_N$  los montos de estas reclamaciones. Considérese que  $N$  y las  $Y_1, \dots, Y_N$  son variables aleatorias independientes. Además se supone que las reclamaciones mismas son independientes entre sí y que comparten la misma distribución de probabilidad.

### Definición 2.2.1

*El monto agregado o monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria  $S$ , llamada riesgo, y está definida como sigue:*

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i, \quad (2.2)$$

*donde  $Y_1, \dots, Y_N$  es una colección de variables aleatorias independientes, positivas, idénticamente distribuidas e independientes de la variable aleatoria  $N$  con valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Cuando  $N = 0$  se define  $S$  como cero.*

La Ecuación 2.2 representa el *modelo colectivo* para un contrato de seguros.

## 2.3. Proceso de Riesgo a Tiempo Discreto

Supongamos que  $u = \{0, 1, \dots\}$  es el capital inicial de una aseguradora y que en cada unidad de tiempo recibe una unidad monetaria por concepto de primas. Si  $Y_1, Y_2, \dots$  representan los montos de las reclamaciones en los periodos sucesivos, entonces el capital de la compañía aseguradora al tiempo  $n \geq 1$  es la variable aleatoria  $C_n$  definida a continuación.

### Definición 2.3.1

El proceso de riesgo a tiempo discreto  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  está dado por:

$$C_n = u + n - \sum_{i=1}^n Y_i,$$

donde  $u \geq 0$  es un entero y  $Y_1, Y_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto  $\{0, 1, \dots\}$ , tales que  $E(Y) < 1$ .

Dada la hipótesis de independencia e idéntica distribución de las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots$ , se puede verificar que el proceso  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  tiene incrementos independientes y estacionarios. Al suponer que las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots$  son tales que  $E(Y) < 1$ , se establece que por cada unidad de tiempo, la cantidad de dinero recibida por concepto de primas (en este caso una unidad monetaria) es mayor al valor promedio de las reclamaciones. A esta condición se le denomina *condición de ganancia neta*.

Dadas las características que se han especificado para la definición del proceso  $\{C_n\}_{n \geq 0}$ , éste resulta ser una cadena de Markov con espacio de estados o valores dado por el conjunto discreto  $\mathbb{Z}$ .

### Definición 2.3.2

Se dice que la compañía aseguradora se encuentra en ruina al tiempo  $n \geq 1$  si  $C_n \leq 0$  y se define el tiempo de ruina  $\tau$  como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir:

$$\tau = \min \{n \geq 1 : C_n \leq 0\}. \quad (2.3)$$

Si en la Ecuación 2.3 se presenta que  $\{n \geq 1 : C_n \leq 0\} = \emptyset$ , entonces  $\tau = \infty$  y equivale a la situación cuando la ruina nunca se presenta. El problema de la ruina consiste en encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra en algún conjunto de tiempos específico.

### 2.3.1. Probabilidad de Ruina con Horizonte Infinito

La probabilidad de ruina con horizonte infinito es  $P(\tau < \infty)$ , se denota como  $\psi(u)$  y se define de la siguiente manera:

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid C_0 = u) = P(\tau \in \{1, 2, \dots\} \mid C_0 = u).$$

Es claro que la función  $\psi(u)$  es decreciente, es decir, a mayor capital inicial menor probabilidad de ruina. Esta propiedad puede escribirse como  $\psi(u+1) \leq \psi(u)$  para cualquier  $u \geq 0$ . Además para el modelo de riesgo a tiempo discreto y bajo la condición de ganancia neta se tiene que:

$$\psi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

El siguiente resultado ofrece un mecanismo recursivo para calcular la probabilidad de ruina con horizonte infinito en el proceso de riesgo a tiempo discreto.

#### Proposición 2.3.1.1

Para el proceso de riesgo a tiempo discreto  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  con valor inicial  $u \geq 0$ , se tiene que:

1.  $\psi(u) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)(1-F(y)) - \sum_{y=0}^{u-1} (1-F(y)), \quad u \geq 1.$
2.  $\psi(0) = E(Y),$

donde  $F$  es la función de distribución de  $Y$ .

Una demostración rigurosa de este resultado puede encontrarse en [11].

### 2.3.2. Probabilidad de Ruina con Horizonte Finito

La probabilidad ruina con horizonte finito  $n \geq 1$  es  $P(\tau \leq n)$ , se denota como  $\psi(u, n)$  y se define de la siguiente manera:

$$\psi(u, n) = P(\tau \leq n \mid C_0 = u) = P(\tau \in \{1, 2, \dots, n\} \mid C_0 = u).$$

Se puede verificar que:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u, n) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

Condicionando sobre el monto de la primera reclamación tal como se hizo en el caso de horizonte infinito, se muestra a continuación una forma recursiva de encontrar  $\psi(u, n)$ .

### **Proposición 2.3.2.1**

Para el proceso de riesgo a tiempo discreto  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  con valor inicial  $u \geq 0$ , se tiene que:

1.  $\psi(u, 1) = 1 - F(u)$ .
2.  $\psi(u, n) = 1 - F(u) + \sum_{y=0}^u \psi(u+1-y, n-1) f(y), \quad n \geq 2,$

donde  $F$  y  $f$  son las funciones de distribución y probabilidad de  $Y$  respectivamente.

Una demostración rigurosa de este resultado puede encontrarse en [11].

## **2.4. Proceso de Riesgo a Tiempo Continuo**

A continuación se presenta una versión a tiempo continuo del proceso de riesgo conocida como el *modelo clásico de Cramér-Lundberg*. Tal modelo es una versión a tiempo continuo del modelo a tiempo discreto visto anteriormente.

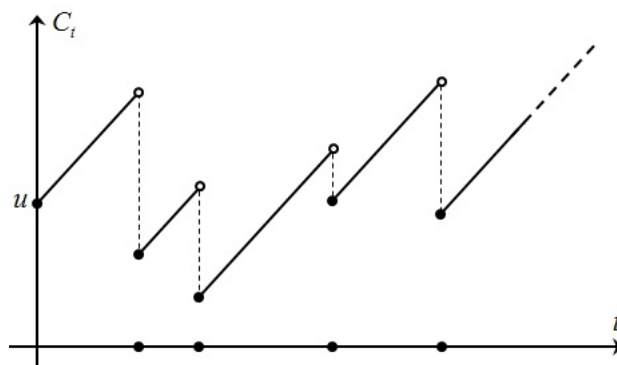
### **2.4.1. Modelo Clasico de Cramér-Lundberg**

El modelo clásico de Cramér-Lundberg es el proceso estocástico a tiempo continuo  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  dado por:

$$C_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

donde  $u$  y  $p$  son constantes positivas,  $Y_1, Y_2, \dots$  es una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes, idénticamente distribuidas, con media finita  $E(Y_i) = \mu$ , varianza  $Var(Y_i) = \sigma^2 \leq \infty$  e independientes del proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  de parámetro  $\lambda$ .

La constante  $u$  representa el capital inicial de la compañía aseguradora,  $pt$  corresponde a la entrada por primas durante el periodo  $(0, t]$  a una tasa constante  $p > 0$ ,  $Y_i$  es el monto de la  $i$ -ésima reclamación, y el proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  modela la forma en la que las reclamaciones son recibidas, donde  $N_t$  es el número de siniestros ocurridos en  $(0, t]$ . El proceso  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  recibe el nombre de *proceso de riesgo* o *proceso de superávit* y tiene trayectorias como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 2.1:** Trayectorias del proceso de riesgo  $\{C_t\}_{t \geq 0}$ .

Tales trayectorias comienzan siempre en el capital inicial  $u$ . Los intervalos en donde estas trayectorias son continuas y crecientes corresponden a periodos en donde no hay reclamaciones. El crecimiento es de la forma  $pt$ . Las discontinuidades son siempre saltos hacia abajo, y aparecen en el momento en que se efectúa una reclamación. El tamaño de un salto es el tamaño de la reclamación dada por la variable  $Y$ . Usando la independencia de las reclamaciones y la estacionariedad de los incrementos en el proceso de Poisson, puede demostrarse que el proceso de riesgo  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes y estacionarios. Dadas las características del proceso  $\{C_t\}_{t \geq 0}$ , éste resulta ser una cadena de Markov en tiempo continuo.

Sean  $W_0, W_1, \dots$  los *tiempos aleatorios de paro* en donde la aseguradora recibe reclamaciones y supondremos  $W_0 = 0$ . Los tiempos que transcurren entre dos reclamaciones sucesivas  $T_k = W_k - W_{k-1}$ , para  $k = 1, 2, \dots$  se denominan *tiempos de inter-arribo*, tales tiempos son independientes e idénticamente distribuidos con distribución exponencial y media finita:

$$E(T_k) = \frac{1}{\lambda}.$$

Teniendo en cuenta que dado un proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  y una sucesión de variables aleatorias  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de  $N_t$ , entonces  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson compuesto si  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ . Lo anterior significa que  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  con  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  es un proceso de Poisson compuesto tal que  $S_t = 0$  si  $N_t = 0$ .

### **Lema 2.4.1.1**

Para cada  $r \geq 0$ , el agregado de reclamaciones  $S_t$  tiene función generadora de momentos:

$$M_{S_t}(r) = E(e^{rS_t}) = M_{N_t}(LnM_{Y_i}(r)).$$



***Demostración:***

Se usa el hecho de que el proceso del número de siniestros  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es independiente del proceso de montos de reclamación  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$

$$\begin{aligned}
M_{S_t}(r) &= E\left(e^{r \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{r \sum_{i=1}^{N_t} Y_i} \mid N_t = k\right) P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{r \sum_{i=1}^k Y_i}\right) P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\prod_{i=1}^k e^{r Y_i}\right) P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E^k\left(e^{r Y_i}\right) P(N_t = k) \\
&= E\left((M_{Y_i}(r))^{N_t}\right) \\
&= E\left(e^{N_t \ln M_{Y_i}(r)}\right) \\
&= M_{N_t}(\ln M_{Y_i}(r)). \quad \square
\end{aligned}$$

Para el modelo clásico de Cramér-Lundberg  $N_t$  es el número de siniestros ocurridos en  $(0, t]$ , la cual se distribuye Poisson con parámetro  $\lambda t$  y tiene función generadora de momentos  $M_{N_t}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$ . Por lo que la función generadora de momentos de  $S_t$  es:

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t(M_{Y_i}(r) - 1)}.$$

***Proposición 2.4.1.1***

Para cada  $r \geq 0$ , el capital  $C_t$  tiene función generadora de momentos:

$$M_{C_t}(r) = E\left(e^{r C_t}\right) = e^{r(u+pt)} M_{S_t}(-r).$$

***Demostración:***

$$\begin{aligned}
M_{C_t}(r) &= E\left(e^{r C_t}\right) \\
&= E\left(e^{r(u+pt) - r S_t}\right) \\
&= e^{r(u+pt)} M_{S_t}(-r). \quad \square
\end{aligned}$$

Para el modelo clásico de Cramér-Lundberg se tiene que:

$$M_{C_t}(r) = e^{r(u+pt)} e^{\lambda t(M_{Y_i}(-r) - 1)}.$$

**Proposición 2.4.1.2**

Sea  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de riesgo, entonces para el modelo de renovación se tiene que:

$$E(C_t) = u + pt - \mu E(N_t).$$

**Demostración:**

$$E(C_t) = E(u + pt - S_t) = u + pt - E(S_t), \text{ con } S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Teniendo en cuenta que el número de siniestros  $N_t$  y el monto de las reclamaciones  $Y_i$  son independientes, entonces:

$$\begin{aligned} E(S_t) &= E(E(S_t | N_t)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \mid N_t = k\right) P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right) P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k E(Y_i) P(N_t = k) \\ &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} k P(N_t = k) \\ &= \mu E(N_t) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $E(C_t) = u + pt - \mu E(N_t)$ .  $\square$

Para el modelo clásico de Cramér-Lundberg  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson homogéneo de parámetro  $\lambda$ , luego  $E(N_t) = \lambda t$ . Por lo tanto:

$$E(C_t) = u + pt - \mu \lambda t = u + (p - \mu \lambda) t.$$

**Proposición 2.4.1.3**

Sea  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de riesgo, entonces para el modelo de renovación se tiene que:

$$\text{Var}(C_t) = \mu^2 \text{Var}(N_t) + \sigma^2 E(N_t).$$

**Demostración:**

Sea  $C_t$  el proceso de riesgo en  $t > 0$ , entonces:

$$\text{Var}(C_t) = \text{Var}(u + pt - S_t) = \text{Var}(S_t).$$

Teniendo en cuenta que el número de siniestros  $N_t$  y el monto de las reclamaciones  $Y_i$  son independientes, entonces:

$$\begin{aligned}
 Var(S_t) &= E(S_t^2) - E^2(S_t) \\
 &= E\left(E\left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)^2 \mid N_t\right)\right) - \mu^2 E^2(N_t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right)^2 \mid N_t = k\right) P(N_t = k) - \mu^2 E^2(N_t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k E(Y_i^2) + \sum_{i \neq j} E(Y_i Y_j)\right) P(N_t = k) - \mu^2 E^2(N_t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(\sigma^2 + \mu^2) + k(k-1)\mu^2\right) P(N_t = k) - \mu^2 E^2(N_t) \\
 &= (\sigma^2 + \mu^2) E(N_t) + \mu^2 E(N_t^2) - \mu^2 E(N_t) - \mu^2 E^2(N_t) \\
 &= \sigma^2 E(N_t) + \mu^2 Var(N_t). \quad \square
 \end{aligned}$$

Para el modelo clásico de Cramér-Lundberg  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson homogéneo de parámetro  $\lambda$ , luego  $E(N_t) = \lambda t$ . Por lo tanto:

$$Var(S_t) = \sigma^2 \lambda t + \mu^2 \lambda t = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2).$$

### 2.4.2. Condición de Ganancia Neta

Por la ley fuerte de los grandes números se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right) = p - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = p - \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t}\right) \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right).$$

Pero la velocidad de crecimiento  $\frac{N_t}{t}$  del proceso de Poisson converge casi seguramente al parámetro  $\lambda$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t = p - \lambda \mu.$$

Además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (S_t - pt) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i - pt\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - p = \lambda \mu - p.$$

Si  $p < \lambda \mu$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t < 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (S_t - pt) > 0$  casi seguramente.

Como consecuencia  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_t - pt) = \infty$  y  $\sup_{0 \leq t < \infty} (S_t - pt) = \infty$  casi seguramente.

Además  $P\left(\sup_{0 \leq t < \infty} (S_t - pt) > u\right) = 1$  lo que indica que la compañía aseguradora no tiene solvencia. Por lo que, una condición necesaria para la solvencia de la compañía aseguradora es que  $p > \lambda \mu$ .

La desigualdad anterior se denomina *condición de ganancia neta* y significa que la entrada por primas por unidad de tiempo  $p$ , es mayor que la intensidad de la llegada de los reclamos por el valor esperado de estos últimos  $\lambda\mu$ , para poder cubrir todos las reclamaciones sin tener pérdidas, esto significa que  $E(C_t) > 0$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.4.3. Ruina

Por razones naturales es necesario que  $C_t$  permanezca por encima de cierto nivel mínimo  $a$ , con  $0 < a < u$ . Suponiendo un nuevo capital inicial de magnitud  $u - a$ , se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que este nivel mínimo es cero. De esta forma cuando  $C_t < 0$  para algún  $t > 0$  se dice que hay *ruina*.

#### Definición 2.4.3.1

Se dice que el proceso de riesgo se encuentra en ruina al tiempo  $t > 0$  si  $C_t < 0$  y se define el tiempo de ruina  $\tau$  como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir:

$$\tau = \inf \{t > 0 : C_t < 0\}.$$

De manera análoga al modelo de riesgo a tiempo discreto, se denota la *probabilidad de ruina con horizonte infinito* en el modelo de Cramér- Lundberg como  $\psi(u)$ , es decir:

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid C_0 = u).$$

Además dado un valor  $x > 0$  fijo, la probabilidad de ruina en el intervalo  $(0, x]$  o también llamada *probabilidad de ruina con horizonte finito* es:

$$\psi(u, x) = P(\tau \leq x \mid C_0 = u).$$

Lo cual corresponde a la función de distribución del tiempo de ruina. No deberá haber ambigüedad en estas definiciones pues el modelo o contexto en el que se estudien determinarán el caso correspondiente. Obsérvese la monotonía decreciente de  $\psi(u)$ , es decir, si  $u_1 \leq u_2$ , entonces  $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$ .

#### Proposición 2.4.3.1

La función  $\psi(u)$  es decreciente.

**Demostración:**

Sea  $u_1 \leq u_2$ , entonces para todo  $t \geq 0$ :

$$u_1 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq u_2 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Luego:

$$\left\{ u_1 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ u_2 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq 0 \right\}.$$

de esta manera para algún  $t \geq 0$ :

$$P \left\{ u_1 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq 0 \right\} \leq P \left\{ u_2 + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq 0 \right\}.$$

Es decir  $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$ .  $\square$

### **Proposición 2.4.3.2**

*Para el modelo de Cramér-Lundberg y bajo la condición de ganancia neta:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

#### **Demostración:**

Por la ley fuerte de los grandes números y la condición de ganancia neta se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right) \\ &= c - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \\ &= p - \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right). \end{aligned}$$

Pero la velocidad de crecimiento  $\frac{N_t}{t}$  del proceso de Poisson converge casi seguramente al parámetro  $\lambda$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t = p - \lambda\mu > 0.$$

De esta forma se concluye que la variable aleatoria  $C_t$  diverge a infinito casi seguramente cuando  $t \rightarrow \infty$ . En consecuencia, la variable  $\inf_{t \geq 0} C_t$  está acotada por abajo casi seguramente. Por lo tanto, tomando un capital inicial  $u$  suficientemente grande, la cota inferior de  $\inf_{t \geq 0} C_t$  puede hacerse igual a cero, es decir  $\inf_{t \geq 0} C_t \geq 0$ . Esto quiere decir que  $\psi(u) = 0$  cuando  $u \rightarrow \infty$ .  $\square$

Se presenta a continuación un resultado general sobre la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

### Proposición 2.4.3.3

Supóngase que la función de distribución  $F(y)$  de una reclamación en el modelo de Cramér-Lundberg es continua. Entonces:

1.  $\frac{d}{du}\bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{p} \left( \psi(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF(y) \right).$
2.  $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{p}.$
3.  $\psi(u) = \frac{\lambda}{p} \left( \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y) \bar{F}(y) dy \right),$

donde  $F$  es la función de distribución de  $Y$ ,  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  y  $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$ .

#### Demostración:

Se usará análisis del primer paso condicionando sobre el monto de la primera reclamación  $Y_1$  y el momento  $T_1$  en el que esta reclamación ocurre. Se usará además el hecho de que  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ .

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(u) &= P(\text{"no haya ruina en } (0, \infty) \mid C_0 = u) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{"no haya ruina en } (0, \infty) \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{u+pt} P(\text{"no haya ruina en } (0, \infty) \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+pt} P(\text{"no haya ruina en } (t, \infty) \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+pt} \bar{\psi}(u+pt-y) dF(y) dt.
 \end{aligned}$$

En el análisis anterior se ha separado dos casos para el monto de la primera reclamación  $(0, u+pt) \cup (u+pt, \infty)$ .

Cuando el monto de esta primera reclamación excede el capital  $u+pt$ , hay ruina y por lo tanto la probabilidad de no ruina es 0. Cuando la reclamación es menor o igual a  $u+pt$ , no hay ruina y por lo tanto la probabilidad de no ruina en  $(0, \infty)$  se reduce a la probabilidad de no ruina desde el tiempo  $t$  en adelante pero con capital inicial  $u+pt-y$ , esto es  $\bar{\psi}(u+pt-y)$ . Haciendo el cambio de variable  $s_t = u+pt$  en la última ecuación se obtiene:

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{p} e^{\frac{\lambda u}{p}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda s}{p}} \int_0^s \bar{\psi}(s-y) dF(y) ds.$$

A partir de esta fórmula se puede verificar que la función  $u \mapsto \bar{\psi}(u)$  es diferenciable. Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Se demuestra

a continuación el segundo resultado. Integrando la ecuación diferencial del primer inciso entre 0 y  $u$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{p} \left( \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) dx \right) \\
 &= \frac{\lambda}{p} \left( \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_y^u \bar{\psi}(x-y) dx dF(y) \right) \\
 &= \frac{\lambda}{p} \left( \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \bar{\psi}(x) dx dF(y) \right) \\
 &= \frac{\lambda}{p} \left( \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} \bar{\psi}(x) dF(y) dx \right) \\
 &= \frac{\lambda}{p} \int_0^u \bar{\psi}(x) \bar{F}(u-x) dx.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $y = u - x$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{p} \int_0^u \bar{\psi}(u-y) \bar{F}(y) dy \\
 &= \frac{\lambda}{p} \int_0^\infty \bar{\psi}(u-y) \bar{F}(y) 1_{[0,u]}(y) dy.
 \end{aligned} \tag{1}$$

El siguiente paso es hacer que  $u$  tienda a infinito. En tal caso,  $\bar{\psi}(u)$  tiende a 1. Además el integrando que aparece en el lado derecho es una función monótona creciente en  $u$  y cuyo límite es la función integrable  $\bar{F}(x)$ . Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene:

$$1 - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda}{p} \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = \frac{\lambda\mu}{p}.$$

Por lo tanto:

$$\psi(0) = 1 - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda\mu}{p}. \tag{2}$$

De esta forma se obtiene el segundo resultado. Finalmente de (1) y (2) se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= \frac{\lambda}{p} \left( \mu - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) \bar{F}(y) dy \right) \\
 &= \frac{\lambda}{p} \left( \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y) \bar{F}(y) dy \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la última expresión corresponde a una ecuación íntegro diferencial para la probabilidad de ruina. En general no es fácil resolver este tipo de ecuaciones. Sin embargo, cuando las reclamaciones tienen ciertas distribuciones (como por ejemplo la exponencial) la ecuación es soluble.

Se presenta a continuación una ecuación integral para la probabilidad de ruina con horizonte finito. El análisis es más elaborado que en el caso con horizonte infinito. A la fórmula explícita para  $\bar{\psi}(0, x)$ , que aparece en la siguiente proposición y a la ecuación integral para  $\bar{\psi}(u, x)$ , se les conoce como *fórmulas de Seal*.

**Proposición 2.4.3.4**

(Fórmulas de Seal) Consideremos el proceso de riesgo de Cramér-Lundberg  $C_t = u + pt - S_t$ , donde  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ . Supongamos que las reclamaciones tienen distribución absolutamente continua con función de densidad  $f(y)$  y definase la función:

$$\tilde{f}_{S_t}(y) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f^{*n}(y).$$

Entonces:

1.  $F_{S_t}(x) = e^{-\lambda t} + \int_0^x \tilde{f}_{S_t}(y) dy, \quad x \geq 0.$
2.  $\bar{\psi}(0, x) = \frac{1}{px} \int_0^{px} F_{S_x}(y) dy.$
3.  $\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) = \frac{\lambda}{p} \left( \bar{\psi}(u, x) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF(y) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \right).$
4.  $\bar{\psi}(u, x) = F_{S_x}(u + px) - p \int_0^x \bar{\psi}(0, x-y) \tilde{f}_{S_y}(u + py) dy.$

Donde  $F$  es la función de distribución de  $Y$ ,  $F_{S_t}$  es la función de distribución de  $S_t$  y  $\bar{\psi}(u, x) = 1 - \psi(u, x)$ .

**Demostración:**

La primera identidad se obtiene condicionando sobre el número de reclamaciones. Para cualquier  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} F_{S_t}(x) &= P(S_t \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_t \leq x \mid N_t = n) P(N_t = n) \\ &= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_0^x f^{*n}(y) dy. \end{aligned}$$

Para la segunda identidad, se supone que el capital inicial  $u$  es 0, luego se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0, x) &= P(\tau > x) \\ &= P\left(\bigcap_{t \leq x} (C_t \geq 0)\right) \\ &= P\left(\bigcap_{t \leq x} (S_t \leq pt)\right) \\ &= \int_0^{\infty} P\left(\bigcap_{t \leq x} (S_t \leq pt) \mid S_x = y\right) f_{S_x}(y) dy. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que:



$$P \left( \bigcap_{t \leq x} (S_t \leq pt) \mid S_x = y \right) = \frac{1}{px} (px - y)_+.$$

Recordemos la notación:  $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0, x) &= \frac{1}{px} \int_0^\infty (px - y)_+ f_{S_x}(y) dy \\ &= \frac{1}{px} E(px - S_x)_+ \\ &= \frac{1}{px} \int_0^\infty y dF_{px-S_x}(y) dy \\ &= \frac{1}{px} \int_0^{px} y dF_{px-S_x}(y) dy. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0, x) &= \frac{1}{px} \left( y F_{px-S_x}(y) \Big|_0^{px} - \int_0^{px} F_{px-S_x}(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{px} \left( px - \int_0^{px} P(S_x > v) dv \right) \\ &= \frac{1}{px} \int_0^{px} F_{S_x}(v) dv. \end{aligned}$$

Esto demuestra la segunda identidad. Para la tercera identidad se usa análisis del primer paso condicionando sobre el monto de la primera reclamación  $Y_1$  y el momento  $T_1$  en el que esta reclamación ocurre. Se usa además el hecho de que  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ .

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u, x) &= P(\text{"no haya ruina en } (0, x] \text{"} \mid C_0 = u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{"no haya ruina en } (0, x] \text{"} \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^x \int_0^\infty P(\text{"no haya ruina en } (0, x] \text{"} \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt \\ &\quad + \int_x^\infty \int_0^\infty P(\text{"no haya ruina en } (0, x] \text{"} \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt. \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha separado dos casos. El primero cuando la primera reclamación ocurre al tiempo  $t$  dentro del intervalo  $(0, x]$  y el segundo cuando ocurre después de  $x$ . En el primer caso la probabilidad del evento de interés es distinta de 0 cuando la reclamación es menor o igual a  $u + pt$ . En el segundo caso la probabilidad del evento es 1. Por lo tanto:

$$\bar{\psi}(u, x) = \int_0^x \int_0^{u+pt} P(\text{"no haya ruina en } (0, x] \text{"} \mid Y_1 = y, T_1 = t) dF(y) f_{T_1}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_x^\infty \int_0^\infty dF(y) f_{T_1}(t) dt \\
& = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+pt} \bar{\psi}(u+pt-y, x-t) dF(y) dt + P(T_1 > x).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $s_t = u + pt$  se obtiene:

$$\bar{\psi}(u, x) = e^{\frac{\lambda u}{p}} \int_u^{u+cx} \lambda e^{-\frac{\lambda s}{p}} \int_0^s \bar{\psi}\left(s-y, x-\frac{s-u}{p}\right) dF(y) \frac{1}{p} ds + e^{-\lambda x}.$$

Derivando esta expresión respecto a  $u$  y respecto a  $x$  puede verificarse la ecuación integro diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial u} \bar{\psi}(u, x) = \frac{\lambda}{p} \left( \bar{\psi}(u, x) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y, x) dF(y) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(u, x) \right). \quad (1)$$

Para probar la cuarta ecuación, se reescribe en términos de la transformada de Laplace. Teniendo en cuenta que la expresión  $L_{\bar{\psi}}(s, x)$  denotará la transformada de Laplace de la función  $u \mapsto \bar{\psi}(u, x)$ , es decir:

$$L_{\bar{\psi}}(s, x) = \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, x) du.$$

De esta manera, calculando la transformada de Laplace término a término de la ecuación diferencial (1) se obtiene:

$$sL_{\bar{\psi}}(s, x) - \bar{\psi}(0, x) = \frac{\lambda}{p} \left( L_{\bar{\psi}}(s, x) - L_{\bar{\psi}}(s, x) L_f(s) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} L_{\bar{\psi}}(s, x) \right).$$

O bien:

$$\frac{\partial}{\partial x} L_{\bar{\psi}}(s, x) = L_{\bar{\psi}}(s, x) (ps + \lambda (L_f(s) - 1)) - p\bar{\psi}(0, x).$$

Luego la derivada respecto a  $u$  en la ecuación diferencial parcial (1) ha sido absorbida por la transformada de Laplace y se ha obtenido una ecuación diferencial ordinaria en la variable  $x$ . La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$L_{\bar{\psi}}(s, x) = \left( a - \int_0^x \bar{\psi}(0, y) p e^{-(ps+\lambda(L_f(s)-1))y} dy \right) e^{(ps+\lambda(L_f(s)-1))x}. \quad (2)$$

En donde  $a$  es una constante. Evaluando en  $x = 0$  se obtiene que esta constante es:

$$a = L_{\bar{\psi}}(s, 0) = \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u, 0) du = \int_0^\infty e^{-su} du = \frac{1}{s}.$$

De esta manera, la ecuación (2) adquiere la forma:

$$L_{\bar{\psi}}(s, x) = \frac{1}{s} e^{(ps+\lambda(L_f(s)-1))x} - \int_0^x \bar{\psi}(0, y) p e^{(ps+\lambda(L_f(s)-1))(x-y)} dy. \quad (3)$$

Se demostrará que los dos términos del lado derecho son también una transformada de Laplace. Después de algunos cálculos se puede comprobar los siguientes resultados:

$$\text{a) } L[F_{s_x}(u)](s) = \frac{1}{s} e^{\lambda(L_f(s)-1)x}.$$

$$\text{b) } L[F_{s_x}(u + px)](s) = \frac{1}{s} e^{(ps + \lambda(L_f(s) - 1))x}.$$

$$\text{c) } L[\tilde{f}_{s_x}(u + px)](s) = e^{(ps + \lambda(L_f(s) - 1))x}.$$

Luego, el inciso (b) muestra que el primer sumando de (3) es la transformada de Laplace de  $u \mapsto F_{s_x}(u + px)$ , y por el inciso (c) el segundo sumando es:

$$\begin{aligned} \int_0^x \bar{\psi}(0, y) p \left( L[\tilde{f}_{s_{x-y}}(u + p(x - y))](s) \right) dy &= \int_0^x \bar{\psi}(0, y) p \left( \int_0^\infty e^{-sv} \tilde{f}_{s_{x-y}}(u + p(x - y)) du \right) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-su} p \int_0^x \bar{\psi}(0, x - z) \tilde{f}_{s_z}(u + pz) dz du. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada término de la ecuación (3) es una transformada de Laplace. Por la propiedad de unicidad, las funciones originales deben coincidir, y así es como se obtiene la última ecuación de la proposición.  $\square$



## 3. Distribuciones Tipo Fase

### 3.1. Distribuciones Tipo Fase Continuas

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1], [6], [10] y [14].

En este capítulo se introduce una clase de distribuciones, que desempeñan un papel importante en la teoría del riesgo y tienen una interpretación probabilística útil y conveniente para cálculos numéricos ya que son una de las pocas formas exactas computacionalmente tratables para obtener la probabilidad de ruina  $\psi(u)$ . Su definición se genera a partir de los procesos de Markov de saltos (o cadenas de Markov en el caso discreto). Una distribución tipo fase es la distribución del tiempo de absorción en un proceso de Markov con un número finito de estados, de los cuales uno es absorbente y el resto de estados son transitorios. Casos importantes son la distribución exponencial, Erlang e hiperexponencial.

Considerese un proceso de Markov de saltos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d, d+1\}$  tal que los estados  $1, 2, \dots, d$  son transitorios y el estado  $d+1$  es absorbente. Por lo tanto el proceso tiene una *matriz de intensidad* de la forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz de tamaño  $d \times d$  de subintensidades,  $\mathbf{0}$  es un vector fila de dimensión  $d$  y  $\mathbf{t}$  es un vector columna de dimensión  $d$  el cual se denomina *vector de tasas (intensidades) de salida*, ya que contiene las tasas de salida al estado de absorción. Como las sumas de las filas de  $\mathbf{Q}$  deben ser cero, entonces  $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{e}$  es el vector columna de dimensión  $d$  cuyos elementos son todos 1.

Supóngase que  $P(X_0 = d+1) = 0$  y defínase una distribución inicial para el proceso. Sea  $\pi_i = P(X_0 = i)$  para  $i = 1, \dots, d$  y  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$  la distribución inicial de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  definida en los primeros  $d$  estados únicamente. Asumiendo que  $\pi\mathbf{e} = \sum_{i=1}^d \pi_i = 1$ .

Supóngase que  $\tau = \inf(t > 0 | X_t = d+1)$  es el tiempo hasta que se da la absorción. La distribución de  $\tau$  depende únicamente de  $\pi$  y  $\mathbf{T}$  ya que  $\mathbf{t}$  se da en términos de  $\mathbf{T}$ .

**Definición 3.1.1**

Una distribución tipo fase es la distribución del tiempo hasta que se da la absorción (tiempo de paro)  $\tau = \inf \{t > 0 \mid X_t = d + 1\}$  para un proceso de Markov de saltos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d, d + 1\}$ , donde los estados  $1, 2, \dots, d$  son transitorios y  $d + 1$  es absorbente. Lo anterior se simboliza  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ .

**Lema 3.1.1**

La matriz exponencial de la Ecuación 3.1 está dada por:

$$e^{\mathbf{Q}x} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{T}x} & \mathbf{e} - e^{\mathbf{T}x}\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

**Demstración:**

Usando el hecho de que  $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e}$  se obtiene para  $n \geq 1$  que:

$$\mathbf{Q}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^n & -\mathbf{T}^n\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Además:

$$\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}_{d+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{I}_d$  es la matriz identidad de tamaño  $d \times d$ . Entonces:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{Q}x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n x^n}{n!} \\ &= \mathbf{I}_{d+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n x^n}{n!} \\ &= \mathbf{I}_{d+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!} & -\frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!}\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_{d+1} + \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!} & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!}\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_{d+1} + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!} - \mathbf{I}_d & -\left(\mathbf{I}_d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^n x^n}{n!} - \mathbf{I}_d\right)\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_{d+1} + \begin{pmatrix} e^{\mathbf{T}x} - \mathbf{I}_d & -(e^{\mathbf{T}x} - \mathbf{I}_d)\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\mathbf{T}x} & \mathbf{e} - e^{\mathbf{T}x}\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{P}^x$  denota la matriz de probabilidades de transición en el tiempo  $x$ , entonces se sabe por la ecuación diferencial de Kolmogorov que  $\mathbf{P}^x = e^{\mathbf{Q}x}$ . En particular, se tiene que la restricción de  $\mathbf{P}^x$  en los primeros  $d$  estados transitorios es simplemente  $e^{\mathbf{T}x}$ . Es decir  $\mathbf{P}^x|_E = e^{\mathbf{T}x}$ .

Otra forma de expresar lo anterior es:

$$P(X_t = j, t \leq \tau | X_0 = i) = (e^{\mathbf{T}t})_{ij}. \quad (3.2)$$

### **Teorema 3.1.1**

Si  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces  $P(\tau > x) = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}$ .

#### **Demostración:**

Se tiene que  $\tau > x$  si y solamente si  $X_x \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Por la ley de probabilidad total se tiene:

$$\begin{aligned} P(\tau > x) &= P(X_x \in \{1, 2, \dots, d\}) \\ &= \sum_{j=1}^d P(X_x = j) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d P(X_x = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d P(X_x = j | X_0 = i) \pi_i. \end{aligned}$$

Según la Ecuación 3.2 se tiene que:

$$P(\tau > x) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_i (e^{\mathbf{T}x})_{ij} = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}. \quad \square$$

### **Teorema 3.1.2**

Si  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces la densidad  $f$  de  $\tau$  está dada por:

$$f(x) = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t}. \quad (3.3)$$

#### **Demostración:**

Como  $f(x) dx$  es la probabilidad de salida al estado absorbente en  $(x, x + dx]$ , es decir,  $f(x) dx = P(\tau \in (x, x + dx])$ , entonces al condicionar en un estado inicial  $i$

y un estado  $j$  en el tiempo  $x$  del proceso de Markov subyacente  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} f(x) dx &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d P(\tau \in (x, x+dx] \mid X_x = j, X_0 = i) P(X_x = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d P(\tau \in (x, x+dx] \mid X_x = j) P(X_x = j \mid X_0 = i) \pi_i. \end{aligned}$$

Dado que  $t_j$  (el  $j$ -ésimo elemento de  $\mathbf{t}$ ) es la tasa de salida al estado absorbente, entonces se tiene que:

$$P(\tau \in (x, x+dx] \mid X_x = j) = t_j dx$$

Y según la Ecuación 3.2 se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) dx &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_i (e^{\mathbf{T}x})_{ij} t_j dx \\ &= \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t} dx \end{aligned}$$

Es decir:  $f(x) = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t}$ .  $\square$

### **Teorema 3.1.3**

Si  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces la distribución  $F$  de  $\tau$  esta dada por  $F(x) = 1 - \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}$ .

#### **Demostración:**

Se tiene que  $1 - F(x) = 1 - P(\tau \leq x) = P(\tau > x) = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}$ .

Es decir  $F(x) = 1 - \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}$ .  $\square$

### **Lema 3.1.2**

Sea  $T$  una matriz de subintensidades. Si  $\mathbf{y} \neq 0$  y  $\mathbf{yT} = \mathbf{0}$ , entonces todos los elementos de  $\mathbf{y}$  son no negativos o no positivos.

#### **Demostración:**

Si  $T_i$  representa la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{T}$ , entonces  $\mathbf{yT} = \mathbf{0}$  es equivalente a:

$$y_i (- (T_i)_i) = \sum_{j \neq i} y_j (T_i)_j,$$

donde  $(T_i)_j$  representa el  $j$ -ésimo elemento del vector  $T_i$ . Dado que todos los coeficientes  $-(T_i)_i, (T_i)_j$ , con  $i \neq j$  son todos no negativos, el resultado sigue fácilmente mediante la inspección de los signos de ambas partes en el sistema de ecuaciones.  $\square$



**Teorema 3.1.4**

*Una matriz de subintensidades irreducible es invertible.*

**Demostración:**

Asúmase que  $\mathbf{T}$  es singular. Entonces existe un vector  $\mathbf{v} \neq 0$  para el cual  $\mathbf{v}\mathbf{T} = 0$ . Según el lema 3.1.2, se puede suponer que los elementos de  $\mathbf{v}$  son no negativos y por lo tanto  $\mathbf{v}\mathbf{e} > 0$ . Ahora  $\mathbf{v}\mathbf{T} = 0$  implica que  $\mathbf{v}\mathbf{T}^n = 0$  para todo  $n \geq 1$  y por lo tanto  $\mathbf{v}\mathbf{e}^{\mathbf{T}} = \mathbf{v}$ . Luego también:

$$\mathbf{v}\mathbf{e}^{\mathbf{T}x}\mathbf{e} = \mathbf{v}\mathbf{e} > 0.$$

Sea  $\mathbf{u} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{\mathbf{T}x}\mathbf{e}$ , entonces  $u_i$  es la probabilidad de no ser absorbido cuando se inicie en el estado  $i$ . Tomando límite en la expresión anterior se tiene entonces que  $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{e} > 0$ . Por lo tanto existe una  $i$  tal que  $u_i > 0$ . Por lo tanto, si  $u_i = 0$  para todo  $i$ , entonces  $\mathbf{T}$  debe ser no singular.  $\square$

**Teorema 3.1.5**

*Sea  $\mathbf{U} = (-\mathbf{T})^{-1}$ . Entonces  $u_{ij}$  es el tiempo esperado que se pasara en el estado  $j$  dado que se inició en el estado  $i$  antes de la absorción.*

**Demostración:**

Sea  $Z_j$  el tiempo de permanencia en el estado  $j$  antes de la absorción. Entonces:

$$\begin{aligned} E_i(Z_j) &= E_i \left( \int_0^\tau I\{X_t = j\} dt \right) \\ &= \int_0^\infty E_i(I\{X_t = j\} I\{\tau \geq t\}) dt \\ &= \int_0^\infty P_i(X_t = j, \tau \geq t) dt. \end{aligned}$$

Según la Ecuación 3.2:

$$E_i(Z_j) = \int_0^\infty (e^{\mathbf{T}t})_{ij} dt.$$

Defínase  $\mathbf{V} = (E_i(Z_j))_{ij}$ , entonces:

$$\mathbf{V} = \int_0^\infty e^{\mathbf{T}t} dt = (-\mathbf{T})^{-1} = \mathbf{U}. \quad \square$$

**Teorema 3.1.6**

*Si  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces la función generadora de momentos de  $\tau$  esta dada por:*

$$E(e^{s\tau}) = \pi(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}$$

***Demostración:***

Se tiene que:

$$\begin{aligned} E(e^{s\tau}) &= \int_0^\infty e^{sx} f(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{sx} \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t} dx \\ &= \pi \left( \int_0^\infty e^{(s\mathbf{I} + \mathbf{T})x} dx \right) \mathbf{t} \end{aligned}$$

Pero  $\int_0^b e^{\mathbf{A}x} dx = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}b} - \mathbf{A}^{-1}$ , para toda matriz  $\mathbf{A}$  invertible. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(e^{s\tau}) &= \pi \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(s\mathbf{I} + \mathbf{T})x} dx \right) \mathbf{t} \\ &= \pi \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left( (s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1} e^{(s\mathbf{I} + \mathbf{T})b} - (s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1} \right) \right) \mathbf{t} \\ &= \pi (-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}, \quad \square \end{aligned}$$

***Teorema 3.1.7***

Si  $\tau \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces el  $n$  - ésimo momento de  $\tau$  esta dado por:

$$E(\tau^n) = (-1)^n n! \pi \mathbf{T}^{-n} \mathbf{e}.$$

***Demostración:***

Se tiene que:

$$E(\tau^n) = \frac{d^n}{ds^n} [E(e^{s\tau})] \Big|_{s=0},$$

donde:

$$\frac{d^n}{ds^n} [E(e^{s\tau})] = \frac{d^n}{ds^n} [\pi (-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}] = (-1)^{n+1} n! \pi (s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-n-1} \mathbf{t}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^n}{ds^n} [E(e^{s\tau})] \Big|_{s=0} = (-1)^{n+1} n! \pi \mathbf{T}^{-n-1} \mathbf{t} = (-1)^n n! \pi \mathbf{T}^{-n-1} \mathbf{T} \mathbf{e}.$$

Es decir:

$$E(\tau^n) = (-1)^n n! \pi \mathbf{T}^{-n} \mathbf{e}. \quad \square$$

De lo anterior se puede concluir que la media de  $\tau$  es  $-\pi \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}$ .

### Teorema 3.1.8

Sea  $X \sim PH(\pi, \mathbf{T})$ . Si  $t = -\mathbf{T}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$  para alguna constante  $\lambda > 0$ , entonces  $X \sim \exp(\lambda)$ , es decir, distribuye exponencialmente con tasa  $\lambda$ .

#### Demostración:

Se tiene que:

$$f(x) = \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{t} = \pi e^{\mathbf{T}x} \lambda \mathbf{e} = \lambda \pi e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e} = \lambda S(x),$$

donde  $S(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$  es la función de supervivencia de  $X$ . Pero a partir de  $f(x) = -S'(x)$  y  $S(0) = 1$  se tiene que:

$$S'(x) = -\lambda S(x), S(0) = 1.$$

Lo cual implica que  $S(x) = e^{-\lambda x}$ , es decir,  $X \sim \exp(\lambda)$ .  $\square$

## 3.2. Ejemplos de Distribuciones Tipo Fase Continuas

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [2], [3], [10] y [17].

### 3.2.1. Distribución Exponencial

Supóngase que  $d = 1$  y  $\mathbf{T} = t_{11} = -\beta$ . Entonces  $\pi = \pi_1 = 1$ ,  $\mathbf{t} = t_1 = \beta$  y la distribución tipo fase es el tiempo de vida de una partícula con tasa de fallos constante  $\beta$ . Es decir una distribución exponencial con parámetro  $\beta$ . De esta manera las distribuciones tipo fase con  $d = 1$  son exactamente la clase de distribuciones exponenciales. El correspondiente generador infinitesimal de la cadena de Markov a tiempo continuo que produce el tiempo de espera hasta la absorción exponencial de parámetro  $\beta$  es:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.2. Distribución Erlang

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_d$  variables aleatorias independientes con  $X_i$  distribuida exponencialmente con parámetro  $\beta$  y sea  $S = X_1 + \dots + X_d$ . Como  $S \sim \text{gamma}(d, \beta)$ , entonces  $S$  tiene distribución Erlang con  $d$  fases definida como la distribución Gamma con parámetro entero  $d$  y densidad:

$$f_S(x) = \beta^d \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\beta x}.$$

La cual es una convolución de  $d$  densidades exponenciales con el mismo parámetro  $\beta$ . Luego  $S$  puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con  $d$  estados transitorios que inicia en el estado 1 y siempre salta al siguiente estado en la secuencia, hasta el estado  $d$  desde el cual salta al estado absorbente. Entonces  $S$  tiene una distribución tipo fase con representación  $\pi = (1, 0, \dots, 0)$  de dimensión  $d$  y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -\beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Considérese una cadena de Markov en tiempo continuo con un único estado absorbente  $d + 1$ , vector de probabilidades iniciales  $\pi$  y generador infinitesimal como en la Ecuación 3.1, donde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\theta_1 & \theta_1 p_{12} & \theta_1 p_{13} & \cdots & \theta_1 p_{1d} \\ \theta_2 p_{21} & -\theta_2 & \theta_2 p_{23} & \cdots & \theta_2 p_{2d} \\ \theta_3 p_{31} & \theta_3 p_{32} & -\theta_3 & \cdots & \theta_3 p_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_d p_{d1} & \theta_d p_{d2} & \theta_d p_{d3} & \cdots & -\theta_d \end{bmatrix}$$

Las condiciones para que  $\mathbf{T}$  sea subestocástica son  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\theta_i \geq 0$  para  $1 \leq i \neq j \leq d$  y  $\sum_{j \neq i} p_{ij} < 1$  para  $1 \leq i \leq d$ .

La densidad representada por la Ecuación 3.3 se puede reescribir como una mezcla infinita de densidades de Erlang de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} \theta e^{-\theta x} \frac{(\theta x)^n}{n!},$$

donde  $q_{n+1} = \pi \mathbf{P}^n (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \geq 0$  satisface  $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} = 1$ ,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de tamaño  $d \times d$  y  $\mathbf{P}$  se obtiene uniformizando la matriz  $\mathbf{T}$  haciendo que  $\theta = \max_{i=1, \dots, d} \{\theta_i\}$  y determinando  $\mathbf{P} = \mathbf{I} + \frac{1}{\theta} \mathbf{T}$ . Es decir:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta_1}{\theta} & \frac{\theta_1 p_{12}}{\theta} & \frac{\theta_1 p_{13}}{\theta} & \cdots & \frac{\theta_1 p_{1d}}{\theta} \\ \frac{\theta_2 p_{21}}{\theta} & 1 - \frac{\theta_2}{\theta} & \frac{\theta_2 p_{23}}{\theta} & \cdots & \frac{\theta_2 p_{2d}}{\theta} \\ \frac{\theta_3 p_{31}}{\theta} & \frac{\theta_3 p_{32}}{\theta} & 1 - \frac{\theta_3}{\theta} & \cdots & \frac{\theta_3 p_{3d}}{\theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\theta_d p_{d1}}{\theta} & \frac{\theta_d p_{d2}}{\theta} & \frac{\theta_d p_{d3}}{\theta} & \cdots & 1 - \frac{\theta_d}{\theta} \end{bmatrix}$$

La interpretación probabilística es que la tasa de salida del estado  $i$ , para  $i = 1, \dots, d$  se "acelera" a un tipo de cambio común  $\theta$ , mediante la introducción de realimentación artificial de probabilidades  $1 - \frac{\theta_i}{\theta}$  para cada estado. De esta manera:

$$e^{\mathbf{T}x} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta x} \frac{(\theta x)^n}{n!} \mathbf{P}^n.$$

### 3.2.3. Distribución Hiperexponencial

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_d$  independientes con  $X_i$  distribuida exponencialmente con parámetro  $\beta_i$  y  $f_i$  la correspondiente densidad exponencial. Sea:

$$M = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i(x),$$

donde  $\alpha_i > 0$  y  $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ . Dado que  $M$  es una mezcla de  $d$  distribuciones exponenciales con parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_d$ , entonces  $M$  tiene una distribución hiperexponencial con  $d$  canales paralelos de tal manera que:

$$M = \sum_{i=1}^d \alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}.$$

$M$  también puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con  $d$  estados transitorios. Entonces  $M$  tiene una distribución tipo fase con representación  $\pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  de dimensión  $d$  y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -\beta_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \\ \beta_d \end{bmatrix}$$

### 3.2.4. Distribución Coxian

Estas distribuciones surgen de la convolución de distribuciones exponenciales con un número aleatorio de términos (llamados fases o etapas). Esto se puede interpretar como el tiempo hasta la absorción de un proceso de Markov de saltos. Comenzando en el estado 1, hay una tasa de salto de salida del estado 1 de  $t_1 + t_{12}$ . La probabilidad de un salto al estado 2 es  $\frac{t_{12}}{t_1 + t_{12}}$  y la probabilidad de un salto al estado absorbente es  $\frac{t_1}{t_1 + t_{12}}$ . Esto es equivalente a la tasa de salto del estado 1 al estado 2 la cual es  $t_{12}$ . Mientras que la tasa de salto al estado absorbente (la tasa de salida) es  $t_1$ . Todos los estados  $j$ ,  $j = 1, \dots, d-1$  se comportan de manera similar, mientras que la probabilidad de salto del estado  $d$  al estado absorbente es 1.

Si dejamos que  $\lambda_i = t_i + t_{i,i+1}$  para  $i = 1, \dots, d-1$  y  $\lambda_d = t_d$  entonces la siguiente elección de los parámetros permiten obtener una flujo que conduce a una distribución coxian, la cual es tipo fase con representación  $\pi = (1, 0, \dots, 0)$  de dimensión  $d$  y además:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & t_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & t_{21} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_d \end{bmatrix}.$$

### 3.3. El Modelo de Cramer-Lundberg

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1] y [18].

Considérese un proceso de riesgo:

$$C_t = u + pt - \sum_{i=0}^{N_t} Y_i,$$

donde  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  y las  $Y_i$  son los tamaños de las reclamaciones independientes e idénticamente distribuidas con distribución común  $F$ . Sea  $Y_0 = 0$  para conveniencia de la notación. Es de vital importancia la probabilidad de ruina:

$$\psi(u) = P\left(\inf_{0 \leq t \leq \infty} C_t < 0 \mid C_0 = u\right).$$

Considérese el proceso superávit de reclamaciones (excedente de reclamaciones) o pérdida agregada:

$$S_t = u - C_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i - pt.$$

Entonces:

$$\psi(u) = P\left(\sup_{t > 0} C_t > u\right).$$

Sea  $\tau_+ = \tau_+(1) = \inf\{t > 0 \mid S_t > 0\}$  la primera vez que  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  pasa por 0. Esto sólo puede suceder en el momento en que llega una reclamación. La cantidad en la que  $S_t$  rebasa el 0 es  $S_{\tau_+}$ . La distribución de  $S_{\tau_+}$  es defectuosa cuando  $C_t$  tiene una tendencia positiva, que será asumida en todas partes. De lo contrario, la probabilidad de ruina es trivialmente 1. Sea  $G_+$  la función de distribución de  $S_{\tau_+}$ , donde:

$$G_+(x) = P(S_{\tau_+} \leq x, \tau_+ < \infty), \quad \|G_+\| = P(\tau_+ < \infty).$$

Ahora Considérese la próxima vez que el proceso atraviesa este nuevo nivel  $S_{\tau_+}$ . Definase  $\tau_+(n) = \inf\{t > \tau_+(n-1) \mid S_t > S_{\tau_+(n-1)}\}$ . Por los incrementos independientes del proceso de Poisson y la independencia de las reclamaciones, está claro que  $\{S_{\tau_+(n+1)} - S_{\tau_+(n)}\}_{n \geq 1}$  forma un proceso de renovación con distribución entre llegadas  $G_+$ . Como  $\|G_+\| < 1$  el proceso de renovación es terminal con tiempo de vida  $M = \sup_{0 \leq t \leq \infty} S_t$ , donde:

$$P(M \leq x) = (1 - \|G_+\|) \sum_{n=0}^{\infty} G_+^{*n}(x).$$

Esta fórmula se conoce como la *fórmula Pollaczek-Khintchine*. La ruina se produce si y sólo si  $M \geq u$ . Por lo tanto se puede calcular la probabilidad de ruina usando  $G_+$ .

### Lema 3.3.1

Para cualquier  $t > 0$ :

$$S_u^* := S_t - S_{t-u} \sim S_u.$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} S_u^* &= S_t - S_{t-u} \\ &= \sum_{i=0}^{N_t} Y_i - pt - \left( \sum_{i=0}^{N_{t-u}} Y_i - p(t-u) \right) \\ &\sim \sum_{i=0}^{N_u} Y_i - pu = S_u. \quad \square \end{aligned}$$

### Lema 3.3.2

Sea  $R_+(A) = E \left( \int_0^{\tau_+} I \{S_t \in A\} dt \right)$ , entonces  $R_+(\cdot)$  es  $\frac{1}{p}$  veces la medida de Lebesgue restringida a  $(-\infty, 0)$ .

**Demostración:**

Inicialmente:

$$R_+(A) = E \left( \int_0^{\tau_+} I \{S_t \in A, \tau_+ > t\} dt \right) = \int_0^{\infty} P(S_t \in A, \tau_+ > t) dt$$

Según el lema 3.3.1 y usando  $S_u = S_t^* - S_{t-u}^*$  se obtiene:

$$\begin{aligned} P(S_t \in A, \tau_+ > t) &= P(S_t \in A, S_u \leq 0, 0 \leq u \leq t) \\ &= P(S_t^* \in A, S_u \leq 0, 0 \leq u \leq t) \\ &= P(S_t^* \in A, S_t^* - S_{t-u}^* \leq 0, 0 \leq u \leq t) \\ &= P(S_t^* \in A, S_t^* \leq S_{t-u}^* \leq 0, 0 \leq u \leq t) \\ &= P(S_t \in A, S_t \leq S_{t-u} \leq 0, 0 \leq u \leq t) \\ &= P(S_t \in A, S_t \leq S_u \leq 0, 0 \leq u \leq t). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$R_+(A) = \int_0^{\infty} P(S_t \in A, S_t \leq S_{t-u} \leq 0, 0 \leq u \leq t) dt$$

$$= E \left( \int_0^\infty I \{S_t \in A, S_t \leq S_u \leq 0, 0 \leq u \leq t\} dt \right).$$

Entonces  $R_+(A)$  es el tiempo esperado que  $S_t$  está en  $A$  en los valores mínimos antes de  $\tau_+$ . Dado que  $S_t \rightarrow -\infty$  y  $S_t$  es decreciente linealmente aparte de saltos hacia arriba, eventualmente  $S_t$  pasará por todos los puntos de  $A$ . La pendiente del descenso lineal es  $-p$  y pasa a través de  $A$   $p$  veces más rápido que el tiempo de ejecución.  $\square$

Para una función de distribución  $G$  se define la correspondiente medida  $\tilde{G}$  de la forma:

$$\tilde{G}(A) = \int_A dG(x) = P(Y_n \in A).$$

### Lema 3.3.3

$\tilde{G}_+$  es la restricción de  $\lambda R_+ * F$  a  $(0, \infty)$ .

#### **Demostración:**

Es de interés  $\tilde{G}_+(A) = P(S_{\tau_+} \in A)$  y por lo tanto en el estudio del evento  $\{S_{\tau_+} \in A\}$  para  $A \subseteq (0, \infty)$ . Dado  $\{S_u\}_{0 \leq u < t}$ , el valor de  $S_{t-}$  es conocido y la reclamación  $Y$  contribuye al evento  $\{S_{\tau_+} \in A\}$  si hay un salto en el tiempo  $t$  de tal forma que  $S_{t-} + Y \in A$ . Dado que  $S_{t-}$  es fijo, La probabilidad es:

$$I \{t \leq \tau_+\} \int I \{x \in A - S_{t-}\} dF(x) = I \{t \leq \tau_+\} \tilde{F}(A - S_{t-}).$$

Dado que las llegadas se producen de acuerdo con un proceso de Poisson, la probabilidad de una llegada en  $[t, t + dt)$  es  $\lambda dt$ .

$$\begin{aligned} \tilde{G}_+(A) &= P(S_{\tau_+} \in A, \tau_+ < \infty) \\ &= \int_0^\infty E \left( I \{t \leq \tau_+\} \tilde{F}(A - S_{t-}) \mid \{S_u\}_{0 \leq u \leq t} \right) \lambda dt \\ &= \lambda E \left( \int_0^\infty I \{t \leq \tau_+\} \tilde{F}(A - S_{t-}) dt \right) \\ &= \lambda E \left( \int_0^\infty I \{t < \tau_+\} \tilde{F}(A - S_t) dt \right) \\ &= \lambda E \left( \int_0^{\tau_+} \tilde{F}(A - S_t) dt \right). \end{aligned}$$

Recordemos que  $R_+(A) = E \left( \int_0^{\tau_+} I \{S_t \in A\} dt \right)$ . Por lo tanto por un argumento de aproximación estándar, para cualquier función medible:



$$\int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(t) = E \left( \int_0^{\tau_+} g(S_t) dt \right).$$

Defínase  $g(y) = \tilde{F}(A - y)$  (la cual es una función medible no negativa). Entonces:

$$\tilde{G}_+(A) = \lambda E \left( \int_0^{\tau_+} g(S_t) dt \right) = \beta \int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(y) = \lambda R_+ * F(A). \quad \square$$

### Teorema 3.3.1

Sea  $\rho = \frac{\lambda\mu}{p} < 1$ , donde  $\mu = E(Y)$ ,  $Y \sim F$  es el tamaño de las reclamaciones esperadas. Entonces  $G_+$  es una distribución defectuosa con densidad:

$$g_+(x) = \frac{\lambda}{p} (1 - F(x)).$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} G_+(x+dx) - G_+(x) &= \int_{-\infty}^0 \left( F(x+dx-y) - F(x-y) I\{y < 0\} \frac{1}{p} dy \right) \\ &= \frac{\lambda}{p} \int_{-\infty}^0 P(Y \in (x-y, x+dx-y]) dy \\ &= \frac{\lambda}{p} \int_{-\infty}^0 f(x-y) dx dy \\ &= \frac{\lambda}{p} \int_x^\infty f(u) du dx \\ &= \frac{\lambda}{p} (1 - F(x)) dx, \end{aligned}$$

donde  $f$  es la densidad correspondiente de  $F$ .  $\square$

### Teorema 3.3.2

Si las reclamaciones son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución  $\exp(\beta)$ , entonces:

$$\psi(u) = \rho e^{-(\beta - \frac{\lambda}{p})u},$$

$$\text{donde } \rho = \frac{\lambda\mu}{p} = \frac{\lambda}{\beta p} < 1.$$

**Demostración:**

La densidad  $g_+$  esta dada por:

$$g_+(x) = \frac{\lambda}{p} (1 - F(x)) = \frac{\lambda}{p} e^{-\beta x} = \rho \beta e^{-\beta x}.$$

Por lo tanto:

$$\|G_+\| = \int_0^\infty g_+(x) dx = \rho.$$

Entonces  $g_+$  es una distribución exponencial defectuosa. La convolución de distribuciones exponenciales defectuosas causa una distribución Erlang defectuosa con densidad:

$$g_+^{*n}(x) = (\rho\beta)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta x}.$$

Al diferenciar la fórmula de Pollaczek-Khintchine, se obtiene que  $f_M(u)$  esta dada por:

$$f_M(x) = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} g_+^{*n}(x).$$

Al utilizar esta fórmula:

$$\begin{aligned} f_M(u) &= (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} g_+^{*n}(u) \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (\rho\beta)^n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta u} \\ &= (1 - \rho) \rho \beta e^{-\beta u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta \rho u)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= (1 - \rho) \rho \beta e^{-\beta u} e^{\beta \rho u} \\ &= \rho \left( \beta - \frac{\lambda}{p} \right) e^{-(\beta - \frac{\lambda}{p})u}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\psi(u) = P(M > u) = \int_u^\infty f_M(s) ds = \rho e^{-(\beta - \frac{\lambda}{p})u}. \quad \square$$

### 3.4. Reclamaciones Tipo Fase

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [1] y [18].

Consideremos un proceso de riesgo:

$$C_t = u + pt - \sum_{i=0}^{N_t} Y_i,$$

donde  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ . Las reclamaciones  $Y_1, Y_2, \dots$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $PH_d(\pi, \mathbf{T})$  de dimensión  $d$ . Se entiende que  $\sum_{i=0}^0 Y_i = 0$ . Se supone sin pérdida de generalidad que

la pendiente  $p$  es 1 y si este no es el caso se ajusta adecuadamente la tasa de Poisson por  $\frac{\lambda}{p}$ . Es de vital importancia el cálculo de la probabilidad de ruina:

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} C_t < 0 \mid C_0 = u\right).$$

Con el fin de evitar trivialidades se supone que  $C_t$  tiene una deriva positiva. En lugar del proceso de riesgo, es práctica común considerar el proceso de superávit de reclamaciones:

$$S_t = u - C_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i - t.$$

Entonces la probabilidad de ruina se puede escribir como:

$$\psi(u) = P\left(\sup_{t \geq 0} S_t > u\right).$$

Sea  $\tau_+ = \tau_+(1) = \inf\{t \geq 0 \mid S_t > 0\}$  y sea  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  el proceso de Markov subyacente a tiempo  $\tau_+$ . Cuando  $S_t > 0$  por primera vez es debido a que se presentó una reclamación en ese momento. Las reclamaciones son generadas por una distribución tipo fase y por lo tanto hay un proceso de Markov de salto subyacente  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  que genera esta reclamación. El proceso de reclamación  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  inicia a nivel  $S_{(\tau_+)-}$  y tiene un recorrido verticalmente hacia arriba cruzando el nivel 0 en algún momento. Cuando  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  cruza el nivel 0 en el momento  $t = S_{(\tau_+)-}$ , el proceso  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  estará en algún estado transitorio  $1, \dots, d$ . Defínase:

$$\nu_i = P\left(M_{S_{(\tau_+)-}} = i\right),$$

como la probabilidad de que al cruzar el nivel 0 el proceso  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  se encuentre en el estado  $i$ . Defínase además:

$$\tau_+(n+1) = \inf\{t \geq 0 \mid S_t > S_{\tau_+(n)}\},$$

donde  $\tau_+(n)$  es la  $n$ -ésima vez que  $S_t$  llegará a un nuevo valor máximo.

El exceso (tiempo de vida residual)  $S_{\tau_+(n+1)} - S_{\tau_+(n)}$  tiene una distribución tipo fase, es decir  $S_{\tau_+(n+1)} - S_{\tau_+(n)} \sim PH(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{T})$  y el correspondiente proceso escalonado ascendente  $\{S_{\tau_+(n+1)} - S_{\tau_+(n)}\}$  forma un proceso de renovación terminal cero-retrasado.

La ruina ocurre si y sólo si el tiempo de vida del proceso de renovación es más largo que  $u$ , lo cual es equivalente a que el proceso de renovación de tipo fase se encuentre en uno de los estados  $1, \dots, d$  en el tiempo  $u$ . La probabilidad de esto último es:

$$\psi(u) = \nu e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t}\nu)u} \mathbf{e}.$$

Lo cual también es la probabilidad de ruina. Por lo tanto se tiene que calcular la distribución defectuosa  $\nu = (\nu_i)_{i=1,\dots,d}$ .

### Teorema 3.4.1

La probabilidad de ruina está dada por:

$$\psi(u) = \nu e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t}\nu)u} \mathbf{e},$$

donde  $\nu = -\lambda\pi\mathbf{T}^{-1}$

#### Demostración:

Un proceso subyacente cruzará el nivel 0 en estado  $j$  por primera vez en el tiempo  $t$  si y solamente si dicho proceso pasara de algún estado inicial  $i$  al estado  $j$  durante el tiempo  $-S_{t-}$  y si  $t \leq \tau_u$ . La probabilidad de que en  $[t, t + dt)$  halla una llegada es  $\lambda dt$ . Entonces por la ley de probabilidad total:

$$\begin{aligned} \nu_j &= \int_0^\infty E \left( \sum_{i=1}^d \pi_i p_{ij}^{-S_{t-}} I \{ \tau_+ \leq t \} \right) \lambda dt \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i \int_0^\infty E \left( p_{ij}^{-S_{t-}} I \{ t \leq \tau_+ \} \right) dt \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i E \left( \int_0^{\tau_+} p_{ij}^{-S_{t-}} dt \right). \end{aligned}$$

$$\text{Defínase } R_+(A) = E \left( \int_0^{\tau_+} I \{ S_t \in A \} dt \right)$$

Note que  $R_+$  está concentrado sobre  $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ . Es común en teoría de la medida que para cualquier función medible no negativa se tenga:

$$\int_{-\infty}^0 f(y) R_+(dy) = E \left( \int_0^{\tau_+} f(S_t) dt \right).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \nu_j &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i E \left( \int_0^{\tau_+} p_{ij}^{-S_{t-}} dt \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i E \left( \int_0^{\tau_+} p_{ij}^{-S_t} dt \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i \int_{-\infty}^0 p_{ij}^{-y} R_+(dy) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i \int_0^\infty p_{ij}^y R_+(-dy) \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \left( \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i p_{ij}^y \right) R_+(-dy),$$

donde la primera ecuación resulta debido a que la probabilidad de un arribo justamente en el tiempo  $t$  es 0. Pero  $R_+(-dy) = \lambda(dy)$  donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue restringido a  $(-\infty, 0)$ . Por lo tanto:

$$\nu_j = \int_0^\infty \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i p_{ij}^y R_+(-dy) = \int_0^\infty \lambda \sum_{i=1}^d \pi_i p_{ij}^y dy.$$

Lo cual resulta en  $\nu = \int_0^\infty \lambda \pi e^{\mathbf{T}y} dy = -\lambda \pi \mathbf{T}^{-1}$ .  $\square$



## 4. Aplicaciones y Resultados Numéricos

### 4.1. Reclamaciones Exponenciales

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [11]

Supóngase que las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg tienen distribución continua  $PH(\pi, \mathbf{T})$  con  $\pi_{d+1} = 0$ , en donde la matriz de subintensidades  $\mathbf{T}$  es invertible y se cumple la condición de ganancia neta  $\rho = \frac{\lambda\mu}{p} < 1$ . Entonces para cualquier capital inicial  $u \geq 0$ , se tiene que:

$$\psi(u) = \rho \left( -\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1} \right) e^{(\mathbf{T} + \rho \mathbf{t} (-\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1}))u} \mathbf{e}. \quad (4.1)$$

Supóngase además que en este modelo las reclamaciones son exponenciales de parámetro  $\beta$ . Considérese a la distribución exponencial como una distribución tipo fase continua. El correspondiente generador infinitesimal del proceso de Markov que produce el tiempo de espera hasta la absorción exponencial de parámetro  $\beta$  es:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para este caso se tiene que  $d = 1$  y  $\mathbf{T} = t_{11} = -\beta$  (unidimensional). Entonces  $\pi = \pi_1 = 1$  y  $\mathbf{t} = t_1 = \beta$  (unidimensional). Además  $\mu = \frac{1}{\beta}$ , por lo tanto  $\rho = \frac{\lambda}{\beta p}$ . Sustituyendo estos términos en la Ecuación 4.1 se obtiene la siguiente expresión similar a la del teorema 3.3.2:

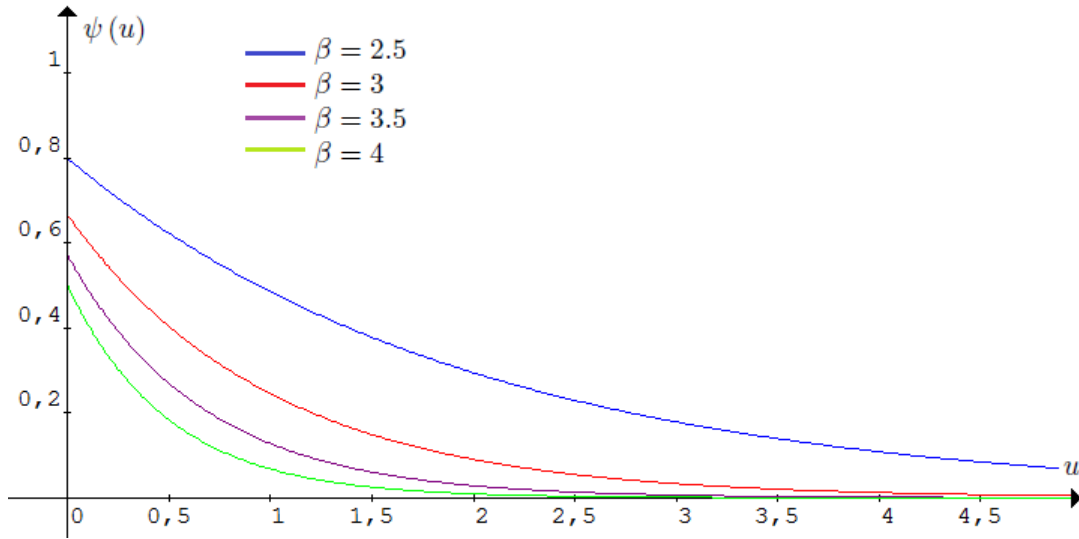
$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta p} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{p})u}. \quad (4.2)$$

La Ecuación 4.2 es uno de los pocos modelos para los cuales la probabilidad de ruina puede encontrarse de manera explícita. Se supondrá que la entrada por primas  $pt$  durante el periodo  $(0, t]$  tiene una tasa constante  $p = 1$ . Por lo tanto la Ecuación 4.2 queda:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta} e^{-(\beta - \lambda)u}. \quad (4.3)$$

En la figura 4.1 se ilustra la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada

$\lambda = 2$ ,  $u \in [0, 5]$  y valores del parámetro  $\beta = 2.5$ ,  $\beta = 3$ ,  $\beta = 3.5$  y  $\beta = 4$ .



**Figura 4.1:** Probabilidad de ruina con reclamaciones exponenciales para  $\lambda = 2$ .

Obsérvese que debido a la condición de ganancia neta, el exponente  $-(\beta - \frac{\lambda}{p})$  es negativo, y por lo tanto la probabilidad de ruina tiende a cero exponencialmente a medida que el capital inicial  $u$  aumenta a infinito. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = 2$  y valores de  $u \in [0, 5]$ .

| $u$ | $\beta = 2.5$ | $\beta = 3$ | $\beta = 3.5$ | $\beta = 4$ |
|-----|---------------|-------------|---------------|-------------|
| 0.0 | 0.8000        | 0.6667      | 0.5714        | 0.5000      |
| 0.5 | 0.6230        | 0.4044      | 0.2699        | 0.1839      |
| 1.0 | 0.4852        | 0.2453      | 0.1275        | 0.0677      |
| 1.5 | 0.3779        | 0.1488      | 0.0602        | 0.0249      |
| 2.0 | 0.2943        | 0.0902      | 0.0284        | 0.0092      |
| 2.5 | 0.2292        | 0.0547      | 0.0134        | 0.0034      |
| 3.0 | 0.1785        | 0.0347      | 0.0063        | 0.0012      |
| 3.5 | 0.1390        | 0.0201      | 0.0030        | 0.0005      |
| 4.0 | 0.1083        | 0.0122      | 0.0014        | 0.0002      |
| 4.5 | 0.0843        | 0.0074      | 0.0007        | 0.0000      |
| 5.0 | 0.0657        | 0.0045      | 0.0003        | 0.0000      |

**Tabla 4.1:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $\lambda = 2$  y valores de  $u \in [0, 5]$ .



## 4.2. Reclamaciones Hiperexponenciales

La siguiente aplicación fue tomada de [2], cuyo objetivo principal es mostrar la complejidad de los cálculos para determinar la probabilidad de ruina de manera explícita bajo condiciones especiales.

Se asumirá una intensidad de llegada  $\lambda = 3$  y el tamaño de las reclamaciones con densidad:

$$M = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}.$$

Pero:

$$M = \frac{1}{2}(3e^{-3x}) + \frac{1}{2}(7e^{-7x}) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_i(x),$$

donde:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

$$f_1(x) = 3e^{-3x}.$$

$$f_2(x) = 7e^{-7x}.$$

Es claro que  $f_1$  y  $f_2$  son densidades exponenciales. Dado que  $M$  es una mezcla de dos distribuciones exponenciales con parámetros  $\beta_1 = 3$  y  $\beta_3 = 7$  respectivamente, entonces  $M$  tiene una distribución hiperexponencial con dos canales paralelos.  $M$  también puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con dos estados transitorios. Entonces  $M$  tiene una distribución tipo fase con representación  $\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  de dimensión  $d = 2$  y además:

$$T = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$t = -Te = -\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto según el teorema 3.4.1, tenemos que:

$$\nu = -\lambda\pi\mathbf{T}^{-1} = -(3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1},$$

donde:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{21} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{21} \end{bmatrix}.$$

De esta manera:

$$\nu = -(3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{21} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{21} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

Además:

$$\mathbf{T} + \mathbf{t}\nu = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} + \mathbf{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix},$$

donde:

$$\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e} = -\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Si se supone que  $\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \mathbf{t}\nu$ , entonces:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \mathbf{t}\nu = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

De esta manera:

$$\psi(u) = \nu e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t}\nu)u} \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e}.$$

A continuación se halla  $\psi(u)$  para cualquier  $u \geq 0$ . Para tal efecto se determina  $e^{\mathbf{Q}u}$  usando el hecho de que si los valores característicos  $\lambda_{i=1,\dots,d}$  de  $\mathbf{Q}$  son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de vectores característicos (columna) correspondientes  $x_{i=1,\dots,d}$  forman una base para  $\mathbb{R}^d$ . Luego la matriz  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{bmatrix}$  es invertible y además  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P} = \text{diag} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \end{bmatrix}$ . De esto último se concluye que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \text{diag} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Por lo tanto:

$$e^{\mathbf{Q}u} = \mathbf{P} \text{diag} \begin{bmatrix} e^{u\lambda_1} & e^{u\lambda_2} & \cdots & e^{u\lambda_d} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Halleemos los valores característicos de  $\mathbf{Q}$ . Para tal efecto se determina el polinomio característico de  $\mathbf{Q}$ :

$$P_{\mathbf{Q}}(\lambda) = \det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6.$$

A continuación se resuelve la ecuación característica  $P_{\mathbf{Q}}(\lambda) = 0$ , lo cual da como resultado  $\lambda_1 = -6$  y  $\lambda_2 = -1$ . Los vectores característicos asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son  $x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}^T$  y  $x_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & 1 \end{pmatrix}^T$  respectivamente. De esta manera:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Lo cual implica que:

$$e^{\mathbf{Q}u} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{-6u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-6u} & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10}e^{-6u} + \frac{9}{10}e^{-u} & -\frac{9}{70}e^{-6u} + \frac{9}{70}e^{-u} \\ -\frac{7}{10}e^{-6u} + \frac{7}{10}e^{-u} & \frac{9}{10}e^{-6u} + \frac{1}{10}e^{-u} \end{bmatrix}.$$

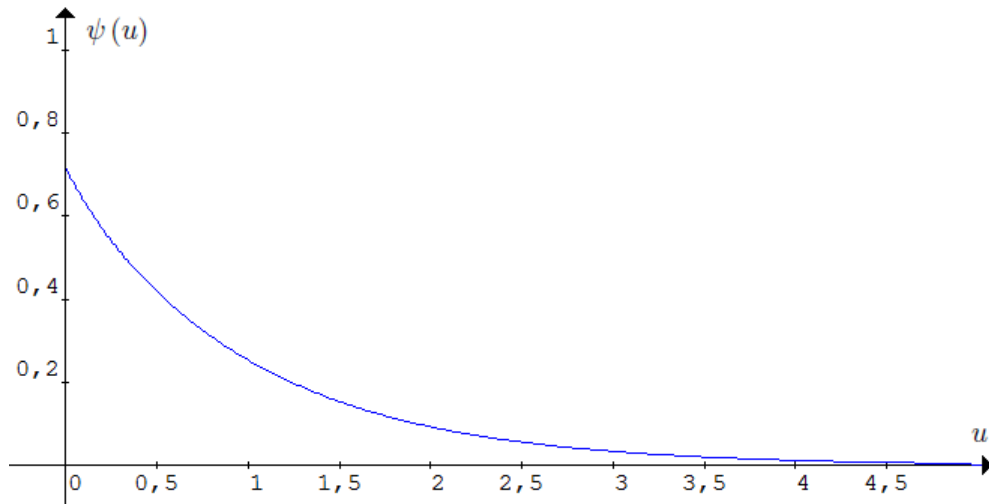
Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \nu e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t}\nu)u} \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10}e^{-6u} + \frac{9}{10}e^{-u} & -\frac{9}{70}e^{-6u} + \frac{9}{70}e^{-u} \\ -\frac{7}{10}e^{-6u} + \frac{7}{10}e^{-u} & \frac{9}{10}e^{-6u} + \frac{1}{10}e^{-u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\psi(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}.$$

En la figura 4.2 se ilustra la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = 3$  y  $u \in [0, 5]$ .



**Figura 4.2:** Probabilidad de ruina con reclamaciones hiperexponenciales para  $\lambda = 3$ .

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = 3$  y algunos valores de  $u \in [0, 5]$ :

| $u$       | 0.0   | 0.5   | 1.0   | 1.5   | 2.0   | 2.5   | 3.0   | 3.5   | 4.0   | 4.5   | 5.0   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\psi(u)$ | 0.714 | 0.417 | 0.252 | 0.153 | 0.092 | 0.056 | 0.034 | 0.020 | 0.012 | 0.007 | 0.004 |

**Tabla 4.2:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $\lambda = 3$  y valores de  $u \in [0, 5]$ .

### 4.3. Reclamaciones con Distribución Erlang

La siguiente aplicación fue tomada de [3], en la cual se considerara un proceso de riesgo  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  con las reclamaciones  $Y_i$  como un proceso Erlang. Sean  $W_0, W_1, \dots$  los tiempos aleatorios de paro en donde la aseguradora recibe reclamaciones con  $W_0 = 0$ .

Supóngase que los tiempos de inter-arribo  $T_k = W_k - W_{k-1}$ , para  $k = 1, 2, \dots$  son independientes e idénticamente distribuidos con función de densidad:

$$f(t) = \beta^2 t e^{-\beta t} = \beta^2 \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} e^{-\beta t}, \text{ para } t > 0.$$

Es decir los  $T_k$  tienen distribución *Erlang*  $(2, \beta)$ . Sea  $\mu$  la media del monto de la reclamación individual y  $p$  el ingreso por primas de la aseguradora por unidad de tiempo. Cuando el tamaño de las reclamaciones tiene distribución tipo fase, la probabilidad de ruina puede darse de forma explícita para el caso exponencial (tal como se mostró en la primera aplicación) así como para tiempos de inter-arribo *Erlang*  $(2, \beta)$ .

Según el modelo clásico de Poisson compuesto si los tiempos de inter-arribo tienen distribución exponencial de parámetro  $\beta$ , entonces la probabilidad de ruina es no trivial si:

$$\rho = \frac{\beta \mu}{p} < 1.$$

Si el tamaño de las reclamaciones tienen una distribución tipo fase  $PH(\pi, \mathbf{T})$ , entonces:

$$\mu = -\pi \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}.$$

De esta manera:

$$\psi(u) = \rho \hat{\pi} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e},$$

donde:

$$\hat{\pi} = -\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1}.$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \rho \mathbf{t} \hat{\pi}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \left( \frac{\beta \mu}{p} \right) \left( -\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1} \right) e^{(\mathbf{T} + (\frac{\beta \mu}{p}) \mathbf{t} (-\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1}))u} \mathbf{e} \\ &= -\frac{\beta}{p} \pi \mathbf{T}^{-1} e^{(\mathbf{T} - \frac{\beta}{p} \mathbf{t} \pi \mathbf{T}^{-1})u} \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Si se asume que  $\lambda = \frac{\beta}{p}$  y  $\nu = -\lambda \pi \mathbf{T}^{-1}$ , entonces se obtiene la fórmula para calcular la probabilidad de ruina del teorema 3.4.1.

$$\psi(u) = \nu e^{(\mathbf{T} + \mathbf{t} \nu)u} \mathbf{e}.$$

Supóngase que las reclamaciones tienen distribución *Erlang*  $(2, 1)$  y el ingreso por primas de la aseguradora por unidad de tiempo es  $p = 4$ . Por lo tanto  $\beta = 1$  y una

reclamación puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con  $d = 2$  estados transitorios que inicia en el estado 1 y siempre salta al siguiente estado en la secuencia, hasta el estado 2 desde el cual salta al estado absorbente 3. Entonces las reclamaciones tienen una distribución tipo fase con representación  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  y además:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Halleemos una formula explícita para  $\psi(u)$ . Para tal efecto se determina:

$$\mu = -\pi \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Por lo tanto:

$$\rho = \frac{\beta\mu}{p} = \frac{(1)(2)}{4} = 0,5.$$

$$\hat{\pi} = -\frac{1}{\mu} \pi \mathbf{T}^{-1} = -0,5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{T} \mathbf{e} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} + \rho \mathbf{t} \hat{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0,25 & -0,75 \end{bmatrix}.$$

Luego:

$$\psi(u) = \rho \hat{\pi} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e} = 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e}.$$

Halleemos  $e^{\mathbf{Q}u}$ . Para tal efecto se determina los valores característicos de  $\mathbf{Q}$ , resolviendo la ecuación característica  $\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}) = 0$ . Lo cual da como resultado  $\lambda_1 = -1,3904$  y  $\lambda_2 = -0,3596$ .

Los vectores característicos asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son  $x_1 = \begin{pmatrix} -0,9315 & 0,3637 \end{pmatrix}^T$  y  $x_2 = \begin{pmatrix} -0,8421 & -0,5393 \end{pmatrix}^T$  respectivamente. De esta manera:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0,9315 & -0,8421 \\ 0,3637 & -0,5393 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,6669 & 1,0414 \\ -0,4498 & -1,1519 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} -1,3904 & 0 \\ 0 & -0,3596 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Lo cual implica que:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{Q}u} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{-1,3904u} & 0 \\ 0 & e^{-0,3596u} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -0,9315 & -0,8421 \\ 0,3637 & -0,5393 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1,3904u} & 0 \\ 0 & e^{-0,3596u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6669 & 1,0414 \\ -0,4498 & -1,1519 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

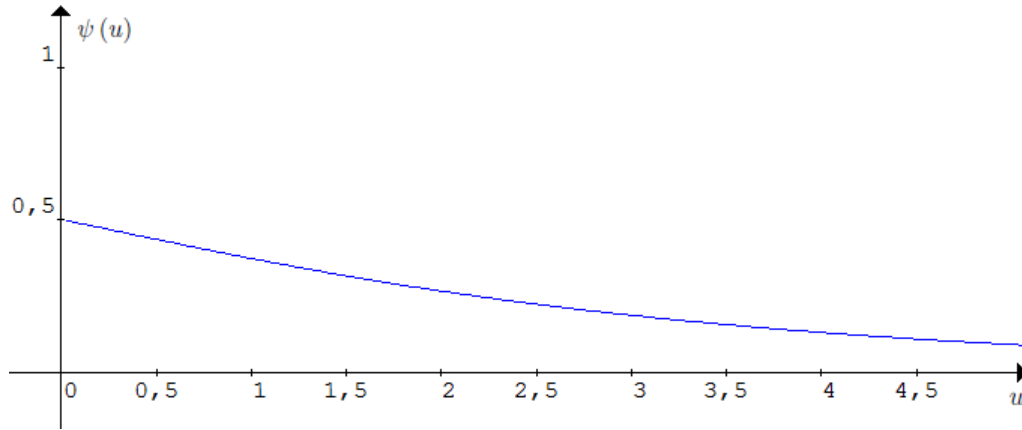
Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} e^{\mathbf{Q}u} \mathbf{e} \\ &= \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0,9315 & -0,8421 \\ 0,3637 & -0,5393 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1,3904u} & 0 \\ 0 & e^{-0,3596u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6669 & 1,0414 \\ -0,4498 & -1,1519 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Es decir:

$$\psi(u) = 0,55317e^{-0,35961u} - 0,05317e^{-1,39039u}.$$

En la figura 4.3 se ilustra la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$  y  $u \in [0, 5]$ .



**Figura 4.3:** Probabilidad de ruina para  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$ .

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$  y algunos valores de  $u \in [0, 5]$ :

| $u$       | 0.0   | 0.5   | 1.0   | 1.5   | 2.0   | 2.5   | 3.0   | 3.5   | 4.0   | 4.5   | 5.0   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\psi(u)$ | 0.500 | 0.435 | 0.372 | 0.315 | 0.266 | 0.223 | 0.187 | 0.156 | 0.131 | 0.109 | 0.091 |

**Tabla 4.3:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{1}{4}$  y  $u \in [0, 5]$ .

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{\beta}{4}$  y valores de  $u \in [0, 5]$ .

| $u$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 1.6$ | $\beta = 1.7$ | $\beta = 1.8$ | $\beta = 1.9$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0 | 0.7500        | 0.8000        | 0.8500        | 0.9000        | 0.9500        |
| 0.5 | 0.7001        | 0.7571        | 0.8156        | 0.8755        | 0.9370        |
| 1.0 | 0.6481        | 0.7119        | 0.7789        | 0.8491        | 0.9228        |
| 1.5 | 0.5975        | 0.6672        | 0.7420        | 0.8222        | 0.9080        |
| 2.0 | 0.5496        | 0.6243        | 0.7060        | 0.7955        | 0.8933        |
| 2.5 | 0.5049        | 0.5836        | 0.6714        | 0.7694        | 0.8786        |
| 3.0 | 0.4636        | 0.5453        | 0.6383        | 0.7440        | 0.8640        |
| 3.5 | 0.4256        | 0.5094        | 0.6067        | 0.7194        | 0.8497        |
| 4.0 | 0.3906        | 0.4758        | 0.5766        | 0.6956        | 0.8356        |
| 4.5 | 0.3584        | 0.4444        | 0.5480        | 0.6725        | 0.8217        |
| 5.0 | 0.3289        | 0.4150        | 0.5208        | 0.6502        | 0.8080        |

**Tabla 4.4:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $\lambda = \frac{\beta}{p} = \frac{\beta}{4}$  y  $u \in [0, 5]$ .

### 4.3.1. Reclamaciones con Distribución Mezcla de Erlang(2)

La siguiente aplicación fue tomada de [19], en la cual se considerara una mezcla de dos distribuciones  $Erlang(2, \frac{3}{5})$  y  $Erlang(2, 9)$ , con  $\beta_1 = \frac{3}{5}$  y  $\beta_2 = 9$  la cual se asume como una distribución tipo fase con representación:

$$\pi = \left( \frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \right).$$

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Luego, una reclamación puede interpretarse como el tiempo hasta la absorción por un proceso de Markov de saltos con  $d = 4$  estados transitorios que inicia en el estado 1 y siempre salta al siguiente estado en la secuencia, hasta el estado 4 desde el cual salta al estado absorbente 5.

Supóngase que el ingreso por primas de la aseguradora por unidad de tiempo es también  $p = 4$ . En la siguiente tabla se muestran algunos cálculos de la probabilidad de ruina para una intensidad de llegada  $\lambda = \frac{\beta_1}{p} = \frac{3}{20}$  y valores de  $u \in [0, 5]$ .

| $u$       | 0.0    | 0.5    | 1.0    | 1.5    | 2.0    | 2.5    | 3.0    | 3.5    | 4.0    | 4.5    | 5.0    |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\psi(u)$ | 0.1500 | 0.1126 | 0.0958 | 0.0812 | 0.0682 | 0.0569 | 0.0472 | 0.0390 | 0.0321 | 0.0264 | 0.0216 |

**Tabla 4.5:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $\lambda = \frac{\beta_1}{p} = \frac{3}{20}$  y  $u \in [0, 5]$ .

## 4.4. Interpolación de la Probabilidad de Ruina

Los referentes teóricos de esta sección fueron tomados de [20] .

En general, determinar la probabilidad de ruina de manera explícita no es fácil. Para el caso hipereponencial cuando  $M$  tiene una dimensión  $d \geq 2$  amerita un proceso matricial complejo o imposible de realizar, por lo que es necesario implementar alguna rutina para programar las operaciones matriciales necesarias para calcular la probabilidad de ruina para un  $u$  fijo. Para realizar lo anterior se propone el código en **R** disponible en el apéndice **A.1**, el cual permite calcular la probabilidad de ruina para un  $u$  fijo.

En la siguiente tabla se muestran algunos cálculos de la probabilidad de ruina para  $M$  con representación  $\pi = \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$ ,  $T = \text{diag} \begin{bmatrix} -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}$  de dimensión  $d = 3$  y para valores de  $u \in [0, 3]$ .

| $u$           | 0.0    | 0.5    | 1.0    | 1.5    | 2.0    | 2.5    | 3.0    |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda = 1$ | 0.1773 | 0.0183 | 0.0020 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $\lambda = 2$ | 0.3547 | 0.0595 | 0.0103 | 0.0018 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| $\lambda = 3$ | 0.5321 | 0.1455 | 0.0404 | 0.0112 | 0.0031 | 0.0008 | 0.0002 |
| $\lambda = 4$ | 0.7095 | 0.3167 | 0.1423 | 0.0640 | 0.0288 | 0.0129 | 0.0058 |
| $\lambda = 5$ | 0.8869 | 0.6475 | 0.4737 | 0.3466 | 0.2536 | 0.1856 | 0.1358 |

**Tabla 4.6:** Algunos valores de la probabilidad de ruina para  $M$  con representación especificada anteriormente y valores de  $u \in [0, 5]$ .

Como aporte al trabajo de *Mogents Bladt* [1], *Asmussen y Rolski* [2] y *Dickson y Hipp* (1998) [3] se implementa el método de *Aproximación Polinomial* con *Polinomios Interpoladores de Newton* (los referentes teóricos sobre este método se pueden ver en el apéndice **B**) para interpolar tablas de valores de la probabilidad de ruina, con el objetivo de encontrar una expresión explícita de naturaleza polinomial que sirva para aproximar la probabilidad de ruina  $\psi(u)$ , por ejemplo considérese el caso con intensidad de llegada  $\lambda = 5$  y  $u$  en  $[0, 3]$ .

| $u_k$       | 0.0    | 0.5    | 1.0    | 1.5    | 2.0    | 2.5    | 3.0    |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\psi(u_k)$ | 0.8869 | 0.6475 | 0.4737 | 0.3466 | 0.2536 | 0.1856 | 0.1358 |

**Tabla 4.7:** Valores para aproximar la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  en  $[0, 3]$  y para  $\lambda = 5$ .

El polinomio de interpolación de Newton viene dado por:

$$P_6(u) = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)(u - u_1) + a_3(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)$$



$$\begin{aligned}
& + a_4 (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2) (u - u_3) \\
& + a_5 (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2) (u - u_3) (u - u_4) \\
& + a_6 (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2) (u - u_3) (u - u_4) (u - u_5).
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
P_6(u) = & a_0 + a_1 u + a_2 u (u - 0,5) + a_3 u (u - 0,5) (x - 1) \\
& + a_4 u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) \\
& + a_5 u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) (u - 2) \\
& + a_6 u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) (u - 2) (u - 2,5).
\end{aligned}$$

Hallemos  $a_0, a_1, \dots, a_6$  por medio de la tabla de diferencias divididas generada a través del código en **M** disponible en el apéndice **A.2**.

| $u_k$ | Diferencias divididas |         |        |         |        |         |        |
|-------|-----------------------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
| $u_0$ | 0.8869                |         |        |         |        |         |        |
| $u_1$ | 0.6475                | -0.4788 |        |         |        |         |        |
| $u_2$ | 0.4737                | -0.3476 | 0.1312 |         |        |         |        |
| $u_3$ | 0.3466                | -0.2542 | 0.0934 | -0.0252 |        |         |        |
| $u_4$ | 0.2536                | -0.1860 | 0.0682 | -0.0168 | 0.0042 |         |        |
| $u_5$ | 0.1856                | -0.1360 | 0.0500 | -0.0121 | 0.0023 | -0.0007 |        |
| $u_6$ | 0.1358                | -0.0996 | 0.0364 | -0.0091 | 0.0015 | -0.0003 | 0.0001 |

**Tabla 4.8:** Diferencias divididas de  $\psi$ .

Por lo tanto:

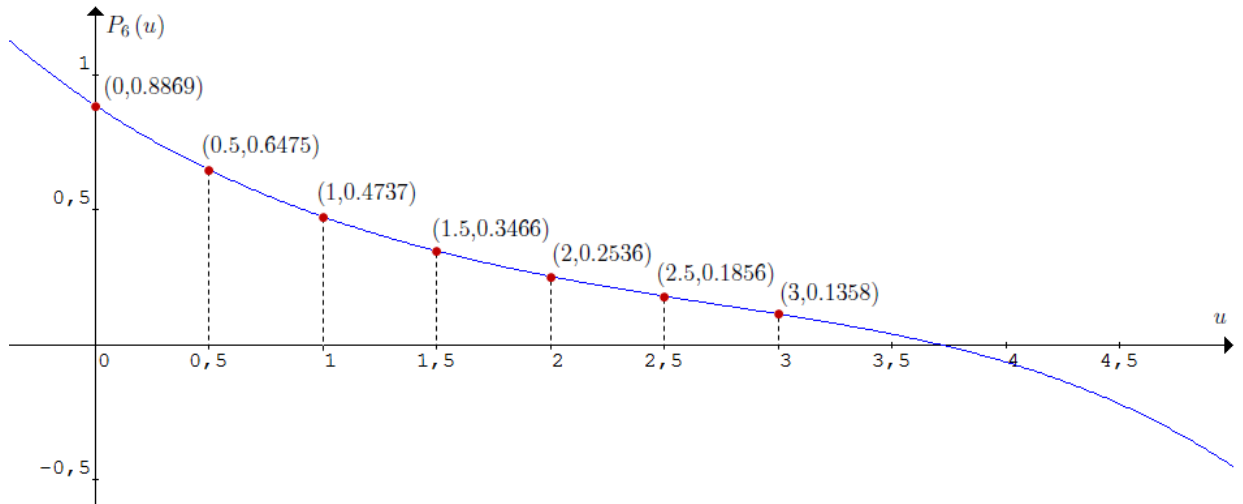
$$\begin{aligned}
P_6(u) = & 0,8869 - 0,4788u + 0,1312u (u - 0,5) - 0,0252u (u - 0,5) (x - 1) \\
& + 0,0042u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) \\
& - 0,0007u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) (u - 2) \\
& + 0,0001u (u - 0,5) (u - 1) (u - 1,5) (u - 2) (u - 2,5).
\end{aligned}$$

Es decir:

$$P_6(u) = 0,0001u^6 - 0,0018u^5 + 0,0110u^4 - 0,0483u^3 + 0,1877u^2 - 0,5618u + 0,8869.$$

Debido a que este polinomio interpola la probabilidad de ruina en los nodos  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0.5$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 1.5$ ,  $u_4 = 2$ ,  $u_5 = 2.5$  y  $u_6 = 3$  en el intervalo  $[0, 3]$  para un intensidad de llegada  $\lambda = 5$ , dicho polinomio permite aproximar  $\psi(u)$  para cualquier  $u$  en  $[0, 3]$ . Esto permite aproximar la probabilidad de ruina de manera explícita bajo las condiciones dadas.

En la figura 4.4 se ilustra el polinomio de aproximación y los puntos de interpolación:



**Figura 4.4:** Gráfica del polinomio de aproximación y puntos de interpolación.

Los otros polinomios de aproximación de  $\psi(u)$  en  $[0, 3]$  para  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 3$  y  $\lambda = 4$  se determinan de forma análoga.

A continuación se implementa nuevamente polinomios interpoladores de Newton para interpolar la Tabla 4.5, con el objetivo de encontrar una expresión de naturaleza polinomial que sirva para aproximar la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

La correspondiente tabla de diferencias divididas para determinar los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{10}$  es:

| $u_k$    | Diferencias divididas |         |        |         |         |         |         |         |         |         |        |
|----------|-----------------------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $u_0$    | 0.1500                |         |        |         |         |         |         |         |         |         |        |
| $u_1$    | 0.1126                | -0.0748 |        |         |         |         |         |         |         |         |        |
| $u_2$    | 0.0958                | -0.0336 | 0.0412 |         |         |         |         |         |         |         |        |
| $u_3$    | 0.0812                | -0.0292 | 0.0044 | -0.0245 |         |         |         |         |         |         |        |
| $u_4$    | 0.0682                | -0.0260 | 0.0032 | -0.0008 | 0.0119  |         |         |         |         |         |        |
| $u_5$    | 0.0569                | -0.0226 | 0.0034 | 0.0001  | 0.0005  | -0.0046 |         |         |         |         |        |
| $u_6$    | 0.0472                | -0.0194 | 0.0032 | -0.0001 | -0.0001 | -0.0002 | 0.0014  |         |         |         |        |
| $u_7$    | 0.0390                | -0.0164 | 0.0030 | -0.0001 | 0.0000  | 0.0001  | 0.0001  | -0.0004 |         |         |        |
| $u_8$    | 0.0321                | -0.0138 | 0.0026 | -0.0003 | -0.0001 | -0.0000 | -0.0000 | -0.0000 | 0.0001  |         |        |
| $u_9$    | 0.0264                | -0.0114 | 0.0024 | -0.0001 | 0.0001  | 0.0001  | 0.0000  | 0.0000  | 0.0000  | -0.0000 |        |
| $u_{10}$ | 0.0216                | -0.0096 | 0.0018 | -0.0004 | -0.0001 | -0.0001 | -0.0000 | -0.0000 | -0.0000 | -0.0000 | 0.0000 |

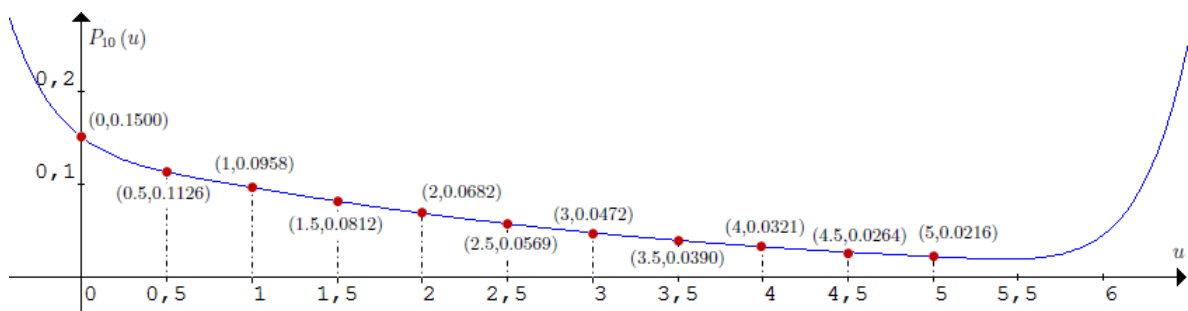
**Tabla 4.9:** Diferencias divididas de  $\psi$ .

Por lo tanto:

$$P_{10}(u) = 0,00000234u^{10} - 0,00006920u^9 + 0,00089354u^8 - 0,00662126u^7 + 0,03109107u^6 \\ - 0,09632305u^5 + 0,19849360u^4 - 0,26708051u^3 + 0,22621943u^2 - 0,14080595u \\ + 0,15000000.$$

Debido a que este polinomio interpola la probabilidad de ruina en los nodos  $u_k$  para  $k = 0, 1, \dots, 10$  en el intervalo  $[0, 5]$  para un intensidad de llegada  $\lambda = \frac{3}{20}$ , dicho polinomio permite aproximar  $\psi(u)$  para cualquier  $u$  en  $[0, 5]$ . Esto permite aproximar la probabilidad de ruina de manera explícita bajo las condiciones dadas.

En la figura 4.5 se ilustra la gráfica de dicho polinomio de aproximación y los puntos de interpolación:



**Figura 4.5:** Gráfica del polinomio de aproximación y puntos de interpolación.



# Conclusiones

En términos generales, dada una distribución de probabilidad tipo fase para las reclamaciones, la fórmula matricial para la probabilidad de ruina del teorema 3.4.1 es susceptible a los cálculos numéricos ya que implica la realización de tediosas operaciones matriciales mediante la implementación de procesos para invertir y hallar exponenciales de matrices, esto no permite obtener expresiones compactas para determinar la probabilidad de ruina salvo casos especiales, como por ejemplo cuando las distribuciones tienen dimensiones pequeñas.

Lo anterior significa que no existen expresiones explícitas para la probabilidad de ruina, salvo en pocos casos conocidos, por lo cual es importante encontrar fórmulas para aproximarla o implementar algoritmos para programar los cálculos matriciales necesarios para determinar tales probabilidades y luego implementar alguna técnica que permita aproximar la probabilidad de ruina de manera uniforme y continua por medio de alguna fórmula de naturaleza polinomial. Lo anterior implica que en algunos casos las probabilidades involucradas pueden tomar valores muy próximos a cero y ello podría arrojar problemas numéricos.

Las distribuciones Tipo Fase desempeñan un papel importante en la teoría del riesgo y tienen una interpretación probabilística útil y conveniente para cálculos numéricos ya que son una de las pocas formas exactas computacionalmente tratables para obtener la probabilidad de ruina.

En todas las aplicaciones se asume como cierta la condición de ganancia neta, es decir que la prima que recibe la compañía por unidad de tiempo  $p$  debe ser mayor que el número de reclamos por unidad de tiempo  $\lambda$  multiplicado por el valor esperado de cada una  $\mu$ , ya que si no fuese así, entonces  $\psi(u) = 1$  para todo  $u \geq 0$ .



# Agradecimientos

*Agradezco a Dios por haberme ungido de voluntad y disciplina para terminar este proyecto de vida. A mi tía Carmen por su apoyo incondicional desde el principio de mi formación profesional y al profesor Francisco por su paciencia y orientación en el desarrollo de este trabajo.*

*A Dios quien me ha dado todo, Mi hijo por su comprensión, Mi esposo por su amor y apoyo incondicional, a mis padres por su ejemplo de lucha y superación, a mis hermanos por su amor, al profesor Francisco por su confianza, a mi compañero Leider por su amistad, a mami y papi., a los amigos que siempre estuvieron pendiente de que este trabajo se realizara. Sandra.*





# A. Rutinas

## A.1. Código en R para calcular la probabilidad de ruina

```
u=2;u
pi=matrix(c(0.5,0.25,0.25), nrow=1, ncol=3, byrow=T);pi
T=matrix(c(-3,0,0,0,-4,0,0,0,-5), nrow=3, ncol=3, byrow=T);T
l=3;l
Pruin=function(u,T,pi,l)
{
  u
  pi
  T
  l
  library(MASS)
  n=nrow(T)
  m=ncol(T)
  invT=solve(T)
  v=-1*pi%*(solve(T))
  e=matrix(1, nrow=n, ncol=1, byrow=T)
  t=-T%*%e
  Q=T+t%*%v
  s=eigen(Q)
  Vc=sort(s$values)
  P=s$vectors
  invP=solve(P)
  h=diag(Vc,n,m)
```

```

uh=u*h
g=diag(exp(diag(uh)))
PginvP= P%*%g%*%invP
Y=v%*%PginvP%*%e
Yn=as.numeric(Y)
print(Yn)
}

```

## A.2. Código en M para calcular polinomios interpoladores de Newton

```

function [C,D]=difdiv(X,Y)
n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';
for j=2:n
    for k=j:n
        D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
    end
end
C=D(n,n);
for k=(n-1):-1:1
    C=conv(C,poly(X(k)));
    m=length(C);
    C(m)=C(m)+D(k,k);
end

```

## B. Polinomio Interpolador de Newton

Un *Polinomio Interpolador de Newton* se construye con base en el siguiente esquema recursivo:

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Donde  $a_k \in \mathbb{R}$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ . Bajo este esquema se dice que el polinomio  $P_n$  es un *Polinomio de Newton* con  $n$  centros  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  el cual es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ .

Si  $P_n$  es un polinomio tal que  $P_n(x_k) = f(x_k)$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , unos  $a_k$  adecuados y una función dada  $f$ , entonces  $P_n$  sería un Polinomio de Newton con  $n$  centros y serian también un polinomio interpolador de  $f$  en los  $n + 1$  nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , el cual recibe el nombre de *Polinomio interpolador de Newton*.

La herramienta más eficiente con la cual se calcula recursivamente los  $a_k$  recibe el nombre de *Diferencias Divididas*. Veamos cómo se definen formalmente:

Primera diferencia dividida:  $f[x_k] = f(x_k)$

Segunda diferencia dividida:  $f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$

Tercera diferencia dividida:  $f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$

$\vdots$

$n+1$ -ésima diferencia dividida:  $f[x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-n+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-n}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-n}}$

Las diferencias divididas se utilizan para construir la siguiente tabla, denominada tabla de diferencias divididas:

| $x_k$    | Diferencias divididas |               |                    |                         |          |
|----------|-----------------------|---------------|--------------------|-------------------------|----------|
| $x_0$    | $f[x_0]$              |               |                    |                         | $\dots$  |
| $x_1$    | $f[x_1]$              | $f[x_0, x_1]$ |                    |                         | $\dots$  |
| $x_2$    | $f[x_2]$              | $f[x_1, x_2]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ |                         | $\dots$  |
| $x_3$    | $f[x_3]$              | $f[x_2, x_3]$ | $f[x_1, x_2, x_3]$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | $\dots$  |
| $\vdots$ | $\vdots$              | $\vdots$      | $\vdots$           | $\vdots$                | $\ddots$ |

Si supongamos que  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son  $n + 1$  números distintos y si  $f$  es una función que toma valores en estos números, entonces existe un único polinomio  $P_n$  de grado a lo sumo  $n$  con la propiedad  $P_n(x_k) = f(x_k)$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ . La forma de Newton de este polinomio interpolador es:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \text{ con } P_0(x) = a_0,$$

donde:

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \text{ para cada } k = 0, 1, \dots, n.$$

Es claro observar que los valores de los coeficientes  $a_k$  son los elementos de la diagonal de la tabla de diferencias divididas.

# Bibliografía

- [1] Bladt M. *Lecture Notes on Phase-Type Distributions*. 2010.
- [2] Asmussen S. and Rolsky T. Computational methods in risk theory: a matrix-algorithmic approach. *Science Publishers*, 10(4), 1991.
- [3] Dickson D. and Hipp D. Ruin probabilities for erlang(2) risk processes. *Science Publishers*, 22(3), 1998.
- [4] Rincon L. *Introduccion a los Procesos Estocasticos*. Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2012.
- [5] Barbosa R y Llinas H. *Procesos Estocasticos con Aplicaciones*. Universidad del Norte, 2013.
- [6] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., and Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, 1999.
- [7] Bhat N. and Miller G. *Elements of Applied Stochastic Processes*. Wiley, 1972.
- [8] Norris J.R. *Markov Chains*. Cambridge, 1997.
- [9] Ching W., Huang X., Ng M., and Siu T. *Markov Chains. Models, Algorithms and Applications*. Springer, 2006.
- [10] Bladt M. A review on phase-type distributions and their use in risk theory. *Astin Bulletin*, 35(1), 2005.
- [11] Rincon L. *Introduccion a la Teoria del Riesgo*. Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2012.
- [12] Dickson D. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge, 2005.
- [13] Tse Y. *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*. Cambridge, 2009.
- [14] Asmussen S. and Albrecher H. *Ruin Probabilities*. World Scientific, 2010.
- [15] Castaner A. *El Reaseguro Proporcional de Umbral y su Influencia en la Probabilidad y Momento de Ruina en una Cartera de Seguros no Vida*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 2009.
- [16] Escalante C. y Arango G. Aspectos basicos del modelo de riesgo colectivo. *Matematicas: Ensenanza Universitaria*, 12(2), 2004.
- [17] Stanford D. and Zadeh A. *Credibility and Phase-type Distributions*. University of Western Ontario, 2011.

- [18] Montanes V. Procesos de renovacion en tiempo discreto: Aplicacion del caso tipo fase en fiabilidad. Master's thesis, Universidad de Granada, 2012.
- [19] Dreikorn S. and Gordon E. On the moments of the time of ruin with applications to phase-type claims. *North American Actuarial Journal*, 9(2).
- [20] Quarteroni A., Sacco R., and Saleri F. *Numerical Mathematics*. Springer, 2000.

# Nomenclatura

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\alpha$                   | Distribución de probabilidad inicial.   |
| $\bar{F}(x)$               | $1 - F(x) = P(X > x)$ .   |
| $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ | Espacio de probabilidad.  |
| $\ G\ $                    | Masa total de una medida $G$ .  |
| $\{N_t\}_{t \geq 0}$       | Proceso de conteo.  |
| $\mathbb{N}$               | Números naturales.  |
| $\mathbb{R}$               | Números reales.   |
| $\mathbb{Z}$               | Números enteros.  |
| $\mathbf{0}$               | Matriz nula.  |
| $\mathbf{A}^{-1}$          | Inversa de la matriz $\mathbf{A}$ .   |
| $\mathbf{A}^T$             | Transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ .   |
| $\mathbf{e}$               | Vector columna con todas sus entradas iguales a 1.  |
| $\mathbf{I}$               | Matriz identidad.   |
| $\mathbf{P}$               | Matriz de probabilidades de transición. $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$   |
| $\mathbf{P}^{(n)}$         | Matriz de probabilidades de transición de la $n$ - <i>esima</i> etapa.<br>$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in E}$ |
| $\mathbf{Q}$               | Matriz de intensidades de transición. $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell}$  |
| $\mathbf{x}^T$             | Transpuesta del vector $\mathbf{x}$ .   |
| $\psi(u, x)$               | Probabilidad de ruina hasta el tiempo $x$ para el capital inicial $u$ .   |
| $\psi(u)$                  | Probabilidad de ruina para el capital inicial $u$ .   |
| $\tau$                     | Tiempo de ruina.  |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $C_t$                 | Proceso de de riesgo en el tiempo $t$ .   |
| $Cov(X, Y)$           | Covarianza de las variables $X$ y $Y$ .   |
| $diag(x)$             | La diagonal de una matriz con los $x_i$ en la digonal.                              |
| $E$                   | Espacio de estados.   |
| $E(X)$                | Valor esperado de $X$ .   |
| $E(X^n)$              | El $n - esimo$ momento de $X$ .   |
| $F * G$               | Convolución.  |
| $F^{*k}$              | $k - esima$ convolución de $F$ .  |
| $F_X$                 | Función de distribución de la variable $X$ .  |
| $f_X$                 | Función de densidad de la variable $X$ .  |
| $I\{A\}$              | Función indicadora del evento $A$ .   |
| $L_f$                 | Transformada de Laplace de la función $f$ .   |
| $M_X(t)$              | Función generadora de momentos de la variable $X$ .                                 |
| $N_t$                 | Número de siniestros ocurridos en $(0, t]$ .  |
| $o(h)$                | Denota cualquier función para la cual $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ . |
| $PH(\pi, \mathbf{T})$ | Distribución tipo fase de parametros $\pi$ y $\mathbf{T}$ .                         |
| $S_t$                 | Proceso de superávit (excedente) de reclamaciones en el tiempo $t$                  |
| $T_i$                 | Tiempos de interarribo o interocurrencia.   |
| $u$                   | Capital inicial.  |
| $Var(X)$              | Varianza de $X$ .   |
| $W_i$                 | Tiempos de saltos.  |
| $X_{t-}$              | Limite por la izquierda. El valor justo antes de $t$ .                              |
| $Y_i$                 | Tamaño de las reclamaciones.  |